

# КРАТКОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВВП УЗБЕКИСТАНА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

---



Центральный банк  
Республики Узбекистан

## Краткосрочное прогнозирование ВВП Узбекистана с помощью динамической факторной модели (DFM)

В целях оценки и прогнозирования текущего уровня **ВВП до выхода официальных данных** после окончания квартала Центральным банком на основе изучения опыта ведущих стран применяется **Динамическая факторная модель (DFM) для Узбекистана**.

**Динамическая факторная модель** использует динамический фактор (также известный, как «индекс диффузии», или общий фактор) – ряд, который измеряет со-направленное движение высокочастотных экономических данных с ВВП.

Полагается, что некоторые наблюдаемые экономические переменные (торговля, промышленное производство и т.д.), также, как и ВВП движутся в одном направлении с ненаблюдаемыми общим реальным фактором. Так вот, «индекс диффузии» делает следующее:

- связывает наблюдаемые переменные с ненаблюдаемой переменной (общим реальным фактором) через уравнение линейной регрессии;
- строит прогноз ВВП для недостающего отрезка времени через динамику общего реального фактора.

Динамическая факторная модель имеет следующий общий вид:

$$X_t = \lambda_t F_t + e_t$$

где,  $F_t = (f_t^T, \dots, f_{t-q}^T)$  вектор лаговых факторов переменных  $T \times N$  в матрице  $X_t$  ( $T$  количество наблюдений и  $N$  количество переменных),  $\lambda_t$  фактор загрузки, и  $e_t$  факторная ошибка.

В данной модели используется **5 макроэкономических переменных** республики (рост реального ВВП, темпы роста промышленного производства, темпы роста реальной денежной массы (M2/CPI), темпы роста реального экспорта, темпы роста реального импорта). Все ряды сезонно сглажены и представляют собой годовые темпы роста в процентном выражении, или точнее, логарифмированную разницу год к году, умноженную на 100.

Затем все ряды урезаются перед оценкой, то есть среднее значение выборки вычитается из каждого наблюдения. Временной ряд ВВП заканчивается за несколько месяцев раньше, чем месячные ряды.

**Компоненты:** Динамическая факторная модель состоит из уравнений измерения (или, «сигнальных» уравнений, полученных с помощью уравнений регрессии) и пространственно-временных уравнений («переходных»).

Уравнения измерения определяют отношение между наблюдаемыми переменными, к примеру, рост ВВП, и ненаблюдаемым общим реальным фактором. Общий фактор также можно назвать индексом совпадающих показателей. Уравнения измерения модели представлены в следующей форме:

- $g\_GDP_t = \lambda_{GDP}S_t + e_{GDP,t}$
- $g\_IP_t = \lambda_{IP}S_t + e_{IP,t}$
- $g\_RealM2_t = \lambda_{RealM2}S_t + e_{RealM2,t}$
- $g\_REXP_t = \lambda_{REXP}S_t + e_{REXP,t}$
- $g\_RIMP_t = \lambda_{RIMP}S_t + e_{RIMP,t}$

Пространственно-временные уравнения описывают движение (1) общего реального фактора, и (2) погрешности (частных факторов) через авторегрессионные процессы первого порядка, AR(1):

- $S_t = \rho_S S_{t-1} + \varepsilon_{S,t}$
- $e_{GDP,t} = \rho_{GDP} e_{GDP,t-1} + \varepsilon_{GDP,t}$
- $e_{IP,t} = \rho_{IP} e_{IP,t-1} + \varepsilon_{IP,t}$
- $e_{RealM2,t} = \rho_{RealM2} e_{RealM2,t-1} + \varepsilon_{RealM2,t}$
- $e_{REXP,t} = \rho_{REXP} e_{REXP,t-1} + \varepsilon_{REXP,t}$
- $e_{RIMP,t} = \rho_{RIMP} e_{RIMP,t-1} + \varepsilon_{RIMP,t}$

Остальные погрешности являются независимыми и равномерно распределенными нормальными случайными величинами:

$$\varepsilon_{GDP,t} \sim iid N(0, \sigma_{GDP}^2); \varepsilon_{IP,t} \sim iid N(0, \sigma_{IP}^2); \varepsilon_{RealM2,t} \sim iid N(0, \sigma_{RealM2}^2);$$

$$\varepsilon_{REXP,t} \sim iid N(0, \sigma_{REXP}^2); \varepsilon_{RIMP,t} \sim iid N(0, \sigma_{RIMP}^2); \varepsilon_{S,t} \sim iid N(0,1);$$

### Оценка

Модель пространства состояний (state-space) является линейной Гауссовской и, следовательно, мы применяем фильтр Калмана.

Все факторы загрузки собраны в векторе  $\theta_\lambda = (\lambda_{GDP}, \lambda_{IP}, \lambda_{RealM2}, \lambda_{REXP}, \lambda_{RIMP})$ ; параметр персистенции в векторе  $\theta_\rho = (\rho_S, \rho_{GDP}, \rho_{IP}, \rho_{RealM2}, \rho_{REXP}, \rho_{RIMP})$ ; и стандартное отклонение погрешностей в векторе  $\theta_\sigma = (\sigma_{GDP}, \sigma_{IP}, \sigma_{RealM2}, \sigma_{REXP}, \sigma_{RIMP})$ , в итоге  $\theta = (\theta_\lambda, \theta_\rho, \theta_\sigma)$ .

## Калибровка

Калибровка начальных значений для параметров модели  $\theta$  проводится через итерации:

**Шаг 1.** Оценка state-space модели проводится методом Максимального правдоподобия (Maximum Likelihood) (с применением фильтра Калмана для каждой итерации) и получается первоначальные оценки параметров  $\bar{\theta}$ ;

**Шаг 2.** Проверка положительного значения факторов загрузки для реального ВВП, промышленного производства, реального М2, реального экспорта и импорта. Рассмотрение реального фактора  $S_t$  который имеет положительную корреляцию с другими переменными. Данная ситуация может возникать в случае недостаточных данных для нахождения реальной позитивной корреляции через метод Максимального правдоподобия (ML). В случае когда загрузки имеют негативное значение, мы меняем их значения в  $\bar{\theta}$  и позволяем  $\theta = \bar{\theta}$ .

**Шаг 3.** Получаем  $\theta_{\sigma,0}$ , где  $\sigma$  равны стандартному отклонению выборки наблюдаемых переменных.

**Шаг 4.** Оценка state-space модели при помощи метода Максимального правдоподобия с использованием  $\theta_0$  как начальной величины.

## Прогноз и фильтрация

Предположим что  $\hat{\theta}$  включает в себя оценочные параметры. Имея выборку в размере  $T$  и оценочные параметры, фильтр Калмана позволяет получить отфильтрованные состояния: общий реальный фактор  $\hat{S}_{t|t}, t = 1 \dots T$  и ненаблюдаемые AR ошибок  $\hat{e}_{i,t|t}, t = 1 \dots T$ , также как и ожидаемые на один период вперед состояния  $t+1$ :  $\hat{S}_{t+1|t} = \hat{\rho}_S \hat{S}_{t|t}$  и  $\hat{e}_{i,t+1|t} = \hat{\rho}_i \hat{e}_{i,t|t}$ , где  $i = \{GDP, IP, RealM2, REXP, RIMP\}$ .

Затем,  $g\_GDP_{t+1|t} = \hat{\lambda}_{GDP} \hat{S}_{t+1|t} + \hat{e}_{GDP,t+1|t}$  является прогнозом роста реального ВВП в отклонении от среднего значения. В последствии, получаем ожидание роста реального ВВП в процентах:  $g\_GDP_{t+1|t} + m_{GDP}$ , где  $m_{GDP}$  является средним значением фактического темпа роста реального ВВП.

Следует отметить, что даже в случае если последний квартал ВВП недоступен, фильтр Калмана генерирует прогноз для каждой отсутствующей величине из ожидаемого уровня.

## Сглаживание

Процедура сглаживания оптимально использует всю информацию в выборке до периода  $T$  для обеспечения сглаженных оценок состояния внутри выборки.

Данные сглаженные оценки состояния являются подходящими для текущего прогноза. Обозначим сглаженные оценки состояния в периоде  $t$  как  $\tilde{S}_{t|T}$ ,  $t = 1 \dots T$ , затем урезанные сглаженные оценки темпов роста ВВП за последние 3 периода являются:

- $g\_GDP_{T|T} = \hat{\lambda}_{GDP}\tilde{S}_{T|T} + \tilde{e}_{GDP,T|T}$
- $g\_GDP_{T-1|T} = \hat{\lambda}_{GDP}\tilde{S}_{T-1|T} + \tilde{e}_{GDP,T-1|T}$
- $g\_GDP_{T-2|T} = \hat{\lambda}_{GDP}\tilde{S}_{T-2|T} + \tilde{e}_{GDP,T-2|T}$

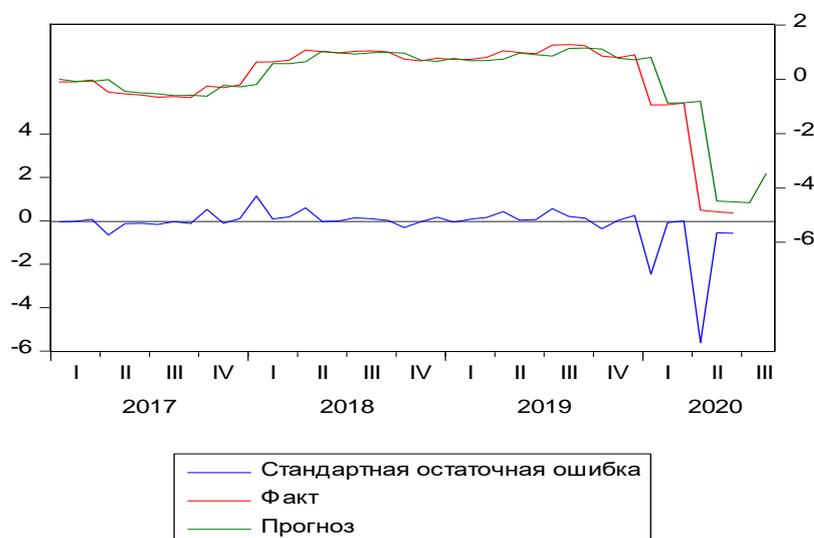
Затем, реальный рост ВВП в процентах имеет следующий вид  $g\_GDP_{t|T} + m_{GDP}$ ,  $t = T - 2, T - 1, T$ , где  $m_{GDP}$  среднее значение выборки фактического темпа роста реального ВВП.

Как и в случае прогнозируемых состояний на один период вперед, мы можем использовать сглаженные данные для формирования сглаженных оценок сигнальных переменных. Данные оценки являются подходящими для проведения текущего прогноза ВВП, связи с тем что, фактические наблюдения для других переменных в периоде текущего прогноза завершено. Вместе с тем, мы можем рассчитать сглаженные оценки колебаний, которые должны быть применены для оценки качества модели внутри выборки.

### Предварительные результаты:

Согласно полученным предварительным результатам оценки динамической факторной модели, ожидается постепенное восстановление темпов роста ВВП в течение 3 и 4 кварталов 2020 года, после резкого падения в 1 и 2 кварталах связанное с пандемией COVID-19. Данные выводы сделаны на основе оценки точности модели на основе исторических рядов данных, а также текущего прогноза с применением сглаженных оценок (рис. 1).

Рис. 1: Графическое представление оценок и текущего прогноза



Краткосрочный прогноз темпов роста ВВП на основе полученных результатов динамической факторной модели указывает темп роста ВВП в коридоре  $1,5\% \pm 0,5\%$  с вероятностью в 95% к концу 2020 года.

**Рис. 2: Веерная диаграмма темпов роста ВВП (Fan chart)**

