

Tizimli shartli xatarlar tahlili (Systemic Contingent Claims Analysis)

Annotatsiya

Mazkur metodologik asos tizimli ahamiyatga molik banklardagi aktivlarning kutilayotgan yo'qotishlari va banklar o'rtasidagi bog'liqlikdan foydalangan holda bank tizimi uchun kutilayotgan ekstremal yo'qotishlarni aniqlash usulini ishlab chiqish yuzasidan tayyorlangan. Bunda, tizimli xatarlar ko'lamini baholashga xizmat qiladigan tizimli shartli xatarlar tahlili modeli yoritilgan. Tizimli shartli xatarlar tahlili modeli tizimli ahamiyatga molik banklar uchun shartli xatarlar tahlilini amalga oshirish hamda banklardagi kutilayotgan yo'qotishlarni butun bank tizimi darajasidagi ko'p o'lchovli taqsimotga birlashtirish bosqichlarini o'z ichiga oladi.

Tayanch so'zlar: bank kapitali, defolt, kutilayotgan yo'qotishlar, xatar chegarasi, o'zgaruvchanlik, ekstremal qiymat, ehtimollik.

Tizimli shartli xatarlar tahlili (Systemic Contingent Claims Analysis)

Tizimli shartli xatarlar tahlili (Systemic Contingent Claims Analysis, Systemic CCA)¹ modeli bank aktivlarining bozor qiymati va majburiyatlari orasidagi munosabatni tahlil qilish orqali tizimli xatarlarni baholashda foydalaniladi. Ushbu model orqali banklardagi aktivlarning kutilayotgan yo‘qotishlari va banklar orasidagi bog‘liqlikdan foydalangan holda bank tizimi uchun kutilayotgan ekstremal yo‘qotishlar aniqlanadi.

Systemic CCA modeli ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda, banklar muvaffaqiyatsizligini ifodalovchi omillar orqali shartli xatarlar tahlili (Contingent Claims Analysis, CCA)² amalga oshiriladi. Bunda, tahlil etilayotgan har bir bank uchun defoltgacha bo‘lgan masofa (Distance to Default, DtD), defolt ehtimolligi (Probability of Default, PD) va kutilayotgan yo‘qotishlar (Expected Loss) aniqlanadi.

Ikkinchi bosqichda banklar uchun hisoblangan kutilayotgan yo‘qotishlar butun bank tizimi darajasidagi ko‘p o‘lchovli taqsimotga birlashtiriladi. Banklarning birgalikdagi kutilayotgan yo‘qotishlarini ehtimollik o‘lchovi belgilanadi va bank tizimi uchun Systemic CCA qiymati aniqlanadi.

A. Contingent Claims Analysis (CCA)

CCA orqali balans va bozor ma’lumotlaridan foydalangan holda bank aktivlarining xavf darajasidan pastga tushish ehtimolligi va ushbu ehtimollikdagi kutilayotgan yo‘qotishlar aniqlanadi. Jumladan, CCAni amalga oshirishda bank kapitalining bozor qiymati, uning o‘zgaruvchanligi, risksiz foiz stavka va majburiyatlar miqdoridan kelib chiqib aniqlangan xatar chegarasidan foydalaniladi. Ushbu ko‘rsatkichlar orqali defoltgacha bo‘lgan masofa, defolt ehtimolligi va kutilayotgan yo‘qotishlar hisoblanadi.

Bank kapitalining bozor qiymati oddiy va imtiyozli aksiyalarning kapital bozoridagi qiymati va sonining o‘zaro ko‘paytmalarini yig‘indisi sifatida aniqlanadi. Bank kapitali bozor qiymatining o‘zgaruvchanligi sifatida har kunlik o‘zgaruvchanlikning 125 kundagi standart chetlanishini yillik ko‘rinishga³

¹ Jobst, A., & Gray, D. (2013). Systemic Contingent Claims Analysis – Estimating Market-Implied Systemic Risk. IMF Working Paper.

² Kyriakopoulos, C., Koulis, A., & Varvounis, G. (2023). Importance of the Contingent Claims Analysis in Detecting Banking Risks: Evidence from the Greek Bank Crisis. Journal of Central Banking Theory and Practice.

³ Bir yilda o‘rtacha 250 ta savdo kunining bo‘lishini inobatga olgan holda, bank kapitali bozor qiymatining o‘zgaruvchanligini yillik ko‘rinishga keltirishda har kunlik o‘zgaruvchanlikning 125 kundagi standart chetlanishi $\sqrt{250}$ soniga ko‘paytirilgan

keltirilgan qiymatidan foydalaniladi. Risksiz foiz stavka sifatida g'aznachilik obligatsiyalari foiz stavkasi inobatga olinadi.

SSA modelida xatar chegarasi (distress barrier) aniqlanadi. Ushbu chegaradan bank aktivlarining pasayishi defolt ehtimolining ortishini anglatadi. Bunda, xatar chegarasi sifatida qisqa muddatli majburiyatlar va uzoq muddatli majburiyatlarning yarmidan foydalaniladi:

$$B = D_S + 0,5 * D_L$$

Bu yerda,

B – xatar chegarasi;

D_S – qisqa muddatli majburiyatlar;

D_L – uzoq muddatli majburiyatlar.

Bank majburiyatlarining bozor qiymati xatarsiz majburiyatlarning joriy qiymati va kutilayotgan yo'qotishlar qiymatlari orasidagi farq orqali aniqlanadi:

$$D_t = B_t e^{-(T-t)} - P_t$$

Bu yerda,

D_t – t davrdagi majburiyatning bozor qiymati;

B_t – xatar chegarasi;

T – majburiyatlarning to'lov muddati;

P_t – t davrdagi kutilayotgan yo'qotishlar qiymati.

1-chizma. CCA algoritmi

Ma'lumotlarni kiritish

$$E, \sigma_E, B, r, T$$

Aktivlarning bozor qiymati va o'zgaruvchanligini baholash

$$A, \sigma_A$$

Defoltgacha bo'lgan masofani aniqlash

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

Defolt ehtimolligini baholash

$$PD = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Kutilayotgan yo'qotishlarni aniqlash

$$P = B_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) - A(1 - N(d_1))$$

Manba: Markaziy bank.

Aktivlar odatda stoxastik jarayonga⁴ amal qiladi va ularning differensial ko‘rinishdagi tenglamasi quyidagicha hosil qilinadi:

$$\frac{dA}{A} = \mu_A dt + \sigma_A dZ(t)$$

Bu yerda,

$\frac{dA}{A}$ – aktiv qiymatining nisbiy o‘zgarishi;

μ_A – aktivlarning qisqa muddatdagi o‘zgarishi (instantaneous drift);

σ_A – aktivlarning o‘zgaruvchanligi (volatility of assets);

$Z(t)$ – Wiener jarayoni (Wiener-process)⁵.

Ushbu keltirilgan uzluksiz tasodifiy miqdorning⁶ differensial ko‘rinishdagi tenglamasi geometrik Broun harakati (Brownian motion)⁷ deb ataladi.

Geometrik Broun harakati tenglamani yechish yordamida aktivlarning t davrdagi uzluksiz tasodifiy miqdori quyidag i ko‘rinishga keltiriladi:

$$A_t = A_0 e^{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A Z(t)}$$

Bu yerda,

A_t – t vaqtida aktivlarning bozor qiymati;

A_0 – aktivlarning boshlang‘ich qiymati;

μ_A – aktivlarning qisqa muddatdagi o‘zgarishi;

σ_A – aktivlarning o‘zgaruvchanligi;

$Z(t)$ – Wiener jarayoni.

⁴ Stoxastik jarayon — bu vaqt davomida tasodifiylik ta’sirida rivojlanib boradigan jarayon.

⁵ Szabados, T. (1994). An Elementary Introduction to the Wiener Process and Stochastic Integrals. Technical University of Budapest.

Wiener jarayoni – aktivlar narxining tasodifiy komponentini ifodalaydi va aktivlar narxidagi kutilmagan beqaror o‘zgarishlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.

⁶ Uzluksiz tasodifiy miqdor – bu chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan tasodifiy miqdor bo‘lib, uning ehtimollik zichlik funksiyasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Bu yerda,

a – ehtimollik zichlik funksiyasining quyi chegarasi;

b – ehtimollik zichlik funksiyasining yuqori chegarasi.

⁷ Shreve, S. (2004). Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer Finance.

Geometrik Broun harakati – moliyaviy aktivlarning vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini tasvirlaydigan model.

Bank aktivlarining t vaqtidagi qiymati xatar chegarasidan past shakllanishi zaifliklardan dalolat beradi. Ushbu hodisaning nazariy jihatdan aniqlangan defolt ehtimolligi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$P(A_t \leq B_t) = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{A_0}{B_t}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma_A \sqrt{T - t}} = -d_{2,\mu}\right).$$

Bu yerda,

$P(A_t \leq B_t)$ – defoltga uchrash ehtimolligi;

$N(-d_{2,\mu})$ – standart normal taqsimot funksiyasi;

$d_{2,\mu}$ – defoltgacha bo‘lgan masofa.

Kapital va majburiyat yig‘indisining aktivlar qiymatiga tengligidan foydalanib majburiyatlarning bozor qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$D_t = A_t - E_t.$$

Bu yerda,

D_t – majburiyatlarning bozor qiymati;

E_t – kapitalning bozor qiymati;

A_t – aktivlarning bozor qiymati.

Majburiyatlarning bozor qiymatini aniqlashda aktivlarning bozor qiymati va ularning o‘zgaruvchanligidan foydalaniladi:

$$\begin{aligned} E &= AN(d_1) - Be^{-rT}N(d_2). \\ D &= A - AN(d_1) + Be^{-rT}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \end{aligned}$$

Aktivlar bozor qiymati va o'zgaruvchanligi kapitalning bozor qiymati hamda o'zgaruvchanligi orqali Ito lemmasi (Ito's lemma)⁸ yordamida aniqlanadi. Ito lemmasi doimiy o'zgarib turuvchi va kutilmagan jarayonlarda funksiyaning o'zgarishini hisoblashga yordam beradi. Bunda, oddiy differensialga ikkinchi tartibli hadning qo'shilishi orqali quyidagi tenglik hosil qilinadi:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial A} \mu_A + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} \sigma_A^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial A} \sigma_A dZ$$

$$E \sigma_E = A \sigma_A \frac{\partial E}{\partial A} = A \sigma_A N(d_1).$$

$$E = AN(d_1) - Be^{-rT} N(d_2)$$

$$E \sigma_E = A \sigma_A N(d_1)$$

Bu orqali aktivlarning bozor qiymati va o'zgaruvchanligini aniqlash mumkin. Bunda, noma'lum parametrlar Broyden usuli (Broyden method)⁹ yordamida aniqlanadi.

Aniqlangandan aktivlarning bozor qiymati va o'zgaruvchanligi orqali defoltgacha bo'lgan masofa, defolt ehtimolligi va kutilayotgan yo'qotishlar aniqlanadi. Xususan, defoltgacha bo'lgan masofa hamda defolt ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi:

$$DtD = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}} = d_2$$

$$PD = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Defoltgacha bo'lgan masofa aktivlar qiymati va xavf chegarasi o'rtasidagi standart og'ishlar sonini ifodalaydi. Baholangan aktivlar xatar chegarasidan pastda bo'lgan holatlarda defoltgacha bo'lgan masofaning ortishi defolt ehtimolini kamaytiradi, aksincha standart og'ishlar sonining kamayishi esa defolt ehtimolini oshiradi.

Defoltgacha bo'lgan masofa va defolt ehtimolligidan kelib chiqib, kutilayotgan yo'qotishlar aniqlanadi:

⁸ Washburn, B., & Dik, M. (2021). Derivation of Black-Scholes equation using Ito's lemma. Proceedings of International Mathematical Sciences.

⁹ Dennis, J., & Schnabel, R. (1996). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.

Broyden usuli – noxiziqli murakkab ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llaniladigan raqamli takrorlash algoritmidir.

$$P = B_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) - A(1 - N(d_1))$$

$$d_1 = d_2 + \sigma_A \sqrt{T}.$$

Bu yerda,

P – kutilayotgan yo‘qotishlar;

B – xatar chegarasi;

r – risksiz foiz stavka;

T – majburiyatlarning to‘lov muddati;

d_2 – defoltgacha bo‘lgan masofa;

A – aktivlarning bozor qiymati;

σ_A – aktivlarning o‘zgaruvchanligi.

Keyingi bosqichda banklar qirqimida hisoblangan kutilayotgan yo‘qotishlar butun tizim darajasidagi ko‘p o‘lchovli taqsimotga jamlanadi.

B. Systemic Contingent Claims Analysis (Systemic CCA)

Bank tizimi bo‘yicha defolt xavfini aniqlash uchun banklarning kutilayotgan yo‘qotishlari birlashtiriladi. Bank tizimi bo‘yicha kutilayotgan yo‘qotishlarni aniqlashda banklarda kutilayotgan yo‘qotishlarning marjinal taqsimoti, bog‘liqlik tuzilishi va birgalikdagi taqsimlanishi baholanadi.

Har bir bank bo‘yicha kutilayotgan yo‘qotishlarning marjinal taqsimotini baholash CCA modeli yordamida aniqlangan kutilayotgan yo‘qotishlar asosida ekstremal qiymat nazariyasiga (Extreme Value Theory, EVT)¹⁰ muvofiq amalga oshiriladi.

¹⁰ Kotz, S., & Nadarajah, S. (1999). Extreme Value Distributions: Theory and Applications. Imperial College Press.

2-chizma. Tizimli shartli xatarlar tahlili algoritmi

Aniqlangan kutilayotgan
yo'qotishlarni kiritish

$$P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)$$

Individual marjinal taqsimot
parametrlarini
baholash

$$\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j, \hat{\xi}_j$$

Bog'liqlilik tuzilishini aniqlash

$$Y(\omega) = \min \left\{ 1, \max \left\{ n \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_{j=1}^m \frac{y_{i,j}}{\omega_j \hat{y}_{.j}} \right)^{-1}, \omega, 1 - \omega \right\} \right\}$$

Birgalikdagi taqsimotini
aniqlash

$$G_{t,m}(x) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right\}$$

Birlashtirilgan $VaR(a)$
qiymatini baholash

$$VaR(a) = \inf \{ x : F(x) \geq a \}$$

Kutilayotgan ekstremal
qiymatlarni aniqlash

$$ES(a) = \frac{1}{1-a} \int_a^1 VaR(b) db$$

Tasodifiy qiymatlari mustaqil va bir xil taqsimlangan kutilayotgan yo‘qotishlarning vektor qiymatlari qatori quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X_j^n = P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)$$

Bu yerda,

j – banklar;

$P_{E,m}^n(t)$ – t davrda kutilayotgan yo‘qotishlar.

Individual asimptotik yuqori darajali (asymptotic tail) harakati Fisher-Tippett-Gnedenko¹¹ teoremasiga muvofiq modellashtirilgan bo‘lib, normallashtirilgan maksimal (yoki minimal) taqsimotning ekstremal bo‘lishi aniqlanadi:

$$X = \max\left(P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)\right).$$

Normallashtiruvchi $\beta_j^n > 0$ va α_j^n o‘zgarmas koeffitsiyentlar yordamida n ta kuzatuvdan olingan maksimal qiymatlarni normallashtirilgan ko‘rinishda ifodalanganda ushbu qiymatlar umumiy ekstremal qiymatlar (Generalized Extreme Value, GEV) taqsimotiga yaqinlashadi ($x \in R$):

$$F_n^{[\beta^n x + \alpha^n]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{X - \alpha^n}{\beta^n} \leq y\right) = [F(\beta^n y + \alpha^n)]^n \rightarrow H(x).$$

Umumiy ekstremal qiymatlar taqsimoti ekstremal harakatlarning uchta alohida turidan Gumbel (EV_0), Frechet (EV_1) va salbiy Weibull (EV_2) biriga mos keladi va quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$EV_0: H_0(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad \text{agar } x \geq 0, \quad \xi = 0$$

$$EV_1: H_{1,\xi}(x) = \exp\left(-x^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \text{agar } x \in \left[\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty\right), \quad \xi > 0$$

$$EV_2: H_2(x) = \exp\left(-(-x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \text{agar } x \in \left(-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi}\right], \quad \xi < 0.$$

Chegaraviy taqsimotlar birlashtirilib quyidagi funksiya hosil qilinadi:

¹¹ Peon, P. (2020). Statistical Extreme Value Theory. Application to basins of the Basque Country. Master Universitario en Matematicas y Computacion.

$$b_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{\left(\frac{1}{\xi}\right)-1} \exp \left(- \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right)$$

Ehtimollik zichlik funksiyaning taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} \exp \left(- \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right), & \text{agar } 1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \geq 0 \\ \exp(-\exp \left(- \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)), & \text{agar } x \in R, \xi = 0 \end{cases}$$

Har bir kutilayotgan yo‘qotish qatorining umumiy ekstremal qiymatlar taqsimotiga chegarada yaqinlashuvchi individual marjinal zichlik funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$y_i(x) = \left(1 + \hat{\xi}_j \frac{(x - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_j} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_j}}_+ \quad (j = 1, \dots, m).$$

$$1 + \hat{\xi}_j \frac{(x - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_j} > 0$$

$$\sigma_j > 0$$

$$\xi_j \neq 0$$

Bir o‘zgaruvchili zichlik funksiyasining o‘rtacha (Mean), chetlanish (Variance), egrilik (Skewness) va keskinlik (Kurtosis) ko‘rsatkichlari aniqlanadi:

$$\text{O‘rtacha: } \begin{cases} \mu + \frac{\sigma(\Gamma(1-\xi)-1)}{\xi}, \text{ agar } \xi \neq 0, \xi < 1 \\ \mu + \sigma\gamma, \text{ agar } \xi = 0 \\ \infty, \text{ agar } \xi \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Chetlanish: } \begin{cases} \frac{\sigma^2(b_1-b_1^2)}{\xi^2}, \text{ agar } \xi \neq 0, \xi < \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma^2\pi^2}{6}, \text{ agar } \xi = 0 \\ \infty, \text{ agar } \xi \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Egrilik: } \begin{cases} \frac{b_3 - 3b_1b_2 + 2b_1^3}{(b_2 - b_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ agar } \xi \neq 0 \\ \frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3}, \text{ agar } \xi = 0 \end{cases}$$

$$\text{Keskinlik: } \begin{cases} \frac{b_4 - 4b_1b_3 + 6b_2b_1^2 - 2b_1^4}{(b_2 - b_1^2)^2}, \text{ agar } \xi \neq 0 \\ \frac{12}{5}, \text{ agar } \xi = 0 \end{cases}$$

Bu yerda,

$b_p = G(1 - p\xi), p \in \{1, \dots, 4\};$

γ – Eyler doimiysi (Euler constant) ($\approx 0,577$)¹²;

$\zeta(t)$ – Riman-zeta funksiyasi (Riemann zeta function)¹³;

$G(t)$ – gamma ehtimollik zichlik funksiyasi¹⁴.

Ushbu ko'rsatkichlar maksimal ehtimollik orqali raqamli takrorlash¹⁵ yordamida bir vaqtda baholanadi. Xususan, umumiy ekstremal qiymatlar taqsimotidagi maksimal ehtimollik baholovchisi bir vaqtning o'zida uchta μ, σ va ξ parametrlar bo'yicha $\prod_{i=1}^n b_{\mu, \sigma, \xi}(x|\theta)$ ehtimolini maksimallashtirish uchun takrorlash yondashuvi orqali baholanadi. Takrorlash yondashuvida baholashni boshlang'ich qiymati sifatida oraliqlar nisbatlarining chiziqli kombinatsiyalaridan¹⁶ (linear combinations of ratios of spacings) foydalaniladi.

Banklar bo'yicha kutilayotgan yo'qotishlarning bog'liqlik tuzilishi baholanadi. Xususan, kutilayotgan yo'qotishlarining marginal taqsimotlari o'rtasida parametrik bo'lmagan, ko'p o'lchovli bog'liqlik funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$Y(\omega) = \min \left\{ 1, \max \left\{ n \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_{j=1}^m \frac{y_{i,j}}{\omega_j \widehat{y}_{\cdot j}} \right)^{-1}, \omega, 1 - \omega \right\} \right\}$$

$$\widehat{y}_{\cdot j} = \sum_{i=1}^n \frac{y_{i,j}}{n}$$

¹² Kaczowski, S. (2021). On a generalization of Euler's constant. Surveys in Mathematics and its Applications.

¹³ Waldschmidt, M. (2017). An introduction to the Riemann zeta function. CIMPA-ICTP Research School.

Riman-zeta funksiyasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$.

¹⁴ Capinski, M., & Kopp, E. (1998). Measure, Integral and Probability. Springer-Verlag.

Gamma funksiyasi ushbu ko'rinishda bo'ladi: $G(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \propto 0$.

¹⁵ Raqamli takrorlash – model parametrlarini ketma-ket hisoblash va yangilash orqali optimal qiymatlarga yaqinlashish usuli.

¹⁶ Oraliqlar nisbatlarining chiziqli kombinatsiyasida tartiblangan kuzatuvlar orasidagi farq olinadi. Yuqori va past qiymatlar atrofidagi oraliqlarni solishtirib logarifmik nisbatlar yig'iladi.

$$0 \leq \max(\omega_1, \dots, \omega_{m-1}) \leq Y(\omega_j) \leq 1.$$

Bu yerda,

$Y(\cdot)$ – qavariq funksiya ($Y(0) = Y(1) = 1$);

$\widehat{y}_j$ – barcha kutilayotgan yo‘qotishlar qiymatlarining ($i \in n$) o‘rtacha marginal zichligini aks ettiradi;

Λ – barcha banklar bo‘yicha ekstremal zichliklarning eng kichik nisbati.

Banklar bo‘yicha kutilayotgan yo‘qotishlarning marjinal taqsimotlarini birlashtirilib, ko‘p o‘zgaruvchili ekstremal qiymat taqsimoti aniqlanadi:

$$G_{t,m}(x) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right\}.$$

Ko‘p o‘zgaruvchili ekstremal qiymat taqsimotining ehtimollik zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$g_{t,m}(x) = \hat{\sigma}_{t,m}^{-1} \left(\left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right)^{\hat{\xi}_{t,m}+1} \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^n y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right\}.$$

Quyidagi ehtimollik funksiyasini maksimal qilish orqali noma’lum parametrlar baholanadi:

$$\prod_{j=1}^m g_{t,m}(x|\theta)$$

Ehtimollik zichlik funksiyalar ko‘paytmasini logarifmlangan qiymati orqali logarifmik ehtimollik funksiyasi aniqlanadi. Bunda, logarifmik ehtimollik funksiyasini maksimallashtiruvchi θ_0 qiymati baholanadi:

$$\sum_{j=1}^m \ln g(x|\theta)$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \hat{l}(\theta|x) \rightarrow \theta_0$$

Noma'lum parametrlar logarifmik ehtimollik funksiyasining maksimal qiymatida aniqlanadi.

Shartli zarar kutilmasi (conditional tail expectation) sifatida kutilayotgan ekstremal yo'qotish inobatga olinadi. Xususan, ekstremal yo'qotish aktivlardagi yo'qotishlarning $VaR_{\alpha=0,95}$ darajasidan oshadigan moliyaviy zararlarni kutilgan qiymatini ifodalaydi:

$$ES_a = E[X|X > VaR_a] = \frac{1}{1 - F(VaR_a)} \int_{VaR_a}^{\infty} (1 - F(x)) dx = \frac{1}{1 - a} \int_a^1 VaR_a da$$

$$VaR_a = \inf\{x: F(x) \geq a\}$$

Xavf ostidagi qiymatning F taqsimot funksiyasiga tegishli kvantildagi ($0 < a < 1$) ko'p o'zgaruvchili ekstremal yo'qotishlar quyidagicha hisoblanadi:

$$ES_{t,\tau,m,a} = -E[z_t | z_t \geq G_{t,\tau,m}^{-1}(a) = VaR_{t,a}]$$

$$= -\frac{1}{a} \int_0^a G_{t,\tau,m}^{-1}(x) dx$$

$$G^{-1}(a) = \inf(x | G(x) \geq a)$$

Bu yerda,

ES – ekstremal yo'qotishlar;

$G^{-1}(a)$ – ehtimollikka mos keladigan kvantil;

z_t – birgalikdagi yo'qotishlar.

Ekstremal yo'qotishlar bo'yicha VaR qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$VaR_{t,a} = \sup\{G_{t,\tau,m}^{-1}(a) | \Pr [z_t > G_{t,\tau,m}^{-1}(a)] \geq a = 0.95\}.$$

Xususan, birgalikda yo'qotishlarining ma'lum bir davrdagi bahosi aniqlanadi:

$$G_{t,\tau,m}^{-1}(a) = \hat{\mu}_{t,m} + \frac{\hat{\sigma}_{t,m}}{\hat{\xi}_{t,m}} \left(\left(-\frac{\ln(a)}{Y_t(\omega)} \right)^{-\hat{\xi}_{t,m}} - 1 \right).$$

Ekstremal yo‘qotishlar tasodifiy o‘zgaruvchilar fazosida aniqlangan haqiqiy funksional izchil xavf o‘lchovini (coherent risk measures)¹⁷ ifodalaydi quyidagi aksiomalar o‘rinli hisoblanadi:

- 1) barcha X va Y lar uchun, $v(X + Y) \leq v(X) + v(Y)$;
- 2) agar $X \leq Y$ bo‘lsa, $v(X) \leq v(Y)$;
- 3) λ musbat o‘zgarmas son uchun uchun $v(\lambda X) = \lambda v(X)$ o‘rinli;
- 4) c o‘zgarmas son uchun $v(X + c) = v(X) + c$ o‘rinli.

Tizimli shartli xatarlar tahlili modelining yakuniy natijasi sifatida ko‘p o‘zgaruvchili ekstremal yo‘qotishlar qiymati inobatga olinadi. Bank tizimi uchun tizimli shartli xatarlar tahlilini amalga oshirishda banklarning tizimli ahamiyatga molik ekanligi, fond birjasidan ro‘yxatdan o‘tganligi va vaqt qatorlari bo‘yicha zaruriy ma’lumotlarning mavjudligi e’tiborga olinadi.

¹⁷ Lam, T., Verma, A., Low, B., & Jaillet, P. (2023). Risk-Aware Reinforcement Learning with Coherent Risk Measures and Non-linear Function Approximation.