

Xatarlar sharoitida iqtisodiy o'sish modeli (Growth at Risk, GaR)

Annotatsiya

Mazkur metodologik asos joriy makromoliyaviy sharoitlarning mamlakatning kelgusi davrdagi real iqtisodiy o'sishiga ta'sirini inobatga olgan holda xatarli ssenariy bo'yicha keskin iqtisodiy pasayish ehtimolini aniqlash yuzasidan tayyorlangan. Bunda, xatarlar sharoitida mamlakat iqtisodiy o'sishini baholash modeli yoritilgan. Xatarlar sharoitida iqtisodiy o'sish modeli ta'sir etuvchi ko'rsatkichlar va iqtisodiy o'sish o'rtasidagi bog'liqlikni kvantil regressiya modeli yordamida baholash, shuningdek baholangan diskret qiymatlarga egri-t taqsimot funksiyasini moslashtirish bosqichlaridan iborat.

Tayanch so'zlar: iqtisodiy o'sish, kvantil, moliyaviy sikl indeksi, nisbiy xatolik, regressiya, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi.

Xatarlar sharoitida iqtisodiy o'sish modeli (Growth at Risk, GaR)

Growth at Risk (GaR)¹ modeli hozirgi makromoliyaviy sharoitlarni kelgusi davrdagi real YaIM o'sishi bilan bog'laydi. Bu tahlilning asosiy ustunligi kelgusi davrdagi real YaIM o'sishining butun taqsimotini baholash hisoblanadi. GaR modelidan foydalanib xatarli ssenariylar ehtimolini miqdoriy baholash mumkin.

Moliyaviy tizim holatidagi o'zgarishlar evolyutsiyasi kelgusi davrdagi iqtisodiy faoliyat uchun o'zgarish davrlarini aniqlash imkonini berishi mumkin. Jumladan, GaR modeli keskin iqtisodiy pasayish ehtimoli aniqligini baholaydi. Bunda, real YaIMning kelgusi davrdagi o'sishining taqsimoti makromoliyaviy o'zgaruvchilar ma'lumotlari asosida baholanadi.

GaR modeli ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda makromoliyaviy o'zgaruvchilar sifatida moliyaviy sikl indeksi² va joriy real YaIM o'sishi, kelgusi davrdagi real YaIM o'sishi bilan turli kvantillarda kvantil regressiya modeli yordamida baholanadi. Ikkinchi bosqichda esa, kvantil regressiya modeli orqali baholangandan so'ng, real YaIM kelgusi davrdagi o'sishining shartli uzluksiz taqsimlanishini taxmin qilish uchun shartli kvantil regressiyalarining baholangan diskret qiymatlariga egri-t (skew-t)³ taqsimot funksiyasi moslashtiriladi.

Kvantil regressiya bahosi

GaR modelining birinchi bosqichi kvantil regressiya modelini baholashni o'z ichiga oladi. Xususan, joriy moliyaviy sikl indeksi hamda joriy real YaIM o'sishining kelgusi davrdagi real YaIM o'sishiga bog'liqligi kvantil regressiya modeli yordamida baholanadi. Kvantil regressiya turli $q \in (10, 25, 50, 75, 90)$ kvantillarda baholanadi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y_{t+h}^q = \alpha^q + \beta_S^q X_{S,t} + \beta_G^q X_{G,t} + \varepsilon_{t+h}^q$$

¹ Prasad, A., Elekdag, S., Jeasakul, P., Lafarguette, R., Alter, A., Xiaochen Feng, A., & Wang, Ch. (2019). Growth at Risk: Concept and Application in IMF Country Surveillance. IMF Working Paper.

² Moliyaviy sikl indeksi metodologiyasi Markaziy bank metodologik asoslarida keltirilgan.

³ Basalamah, D. (2017). Statistical Inference for a New Class of Skew T Distribution and Its Related Properties. Bowling Green State University.

Bu yerda,

q – kvantil;

t – vaqt qatori;

y_{t+h}^q – real YaIMning q kvantilda h chorak keyingi davrdagi o‘shishi;

$X_{S,t}$ – moliyaviy sikl indeksi;

$X_{G,t}$ – real YaIMning joriy o‘shishi;

α^q – o‘zgarmas son;

ε_{t+h}^q – nisbiy xatolik;

β_S^q, β_G^q – noma’lum koeffitsiyentlar.

Turli kvantillarda baholab topilgan kvantil regressiya parametrlari yordamida keyingi davr uchun kvantil regressiyaning baholangan diskret qiymatlari aniqlanadi. Bu diskret qiymatlarga egri-t taqsimotini moslashtirish orqali shartli uzluksiz taqsimot funktsiya olinadi.

Kelgusi davrdagi o‘shishning shartli uzluksiz taqsimotini olish

Kelgusi davrdagi real YaIM o‘shishining turli kvantillari hisoblangandan so‘ng, butun shartli taqsimotni ham hisoblash mumkin. GaR modelining ikkinchi bosqichi kelgusi davrdagi shartli real YaIM o‘shish uzluksiz taqsimotini yaratishni o‘z ichiga oladi. Real YaIMning kelgusi davrdagi o‘shishini taqsimlash shartli kvantil regressiyalarining bashorat qilingan qiymatlariga Azzalini va Kapitanioning egri-t taqsimotini moslashtirish orqali olinadi⁴.

Azzalini va Kapitanioning egri-t taqsimoti o‘rtacha, standart chetlanish, egrilik va erkinlik darajasi parametrlari yordamida tavsiflanadi. Egri-t taqsimoti Styudent-t taqsimoti⁵ yordamida hosil qilinadi. Bunda, o‘rtachasi nol va standart chetlanishi bir

⁴ Drenkovska, M., & Volcjak, R. (2022). Growth-at-Risk and Financial Stability: Concept and Application for Slovenia. Banka Slovenije.

⁵ Styudent-t taqsimotining ehtimollik zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$t_v(x) = \frac{G\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} G\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$
$$v = t - 1$$
$$G(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Bu yerda,

$t_v(x)$ – ehtimollik zichlik funksiyasi;

v – erkinlik darajasi;

bo'lgan standart egri-t taqsimoti asimmetrik shaklda bo'lib, ehtimollik zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f_{v,\beta}(x) = 2t_v(x)T_{v+1}\left(\beta x \sqrt{\frac{v+1}{x^2+v}}\right)$$

Bu yerda,

β – egrilik;

v – erkinlik darajasi;

$t_v(x)$ – (v) erkinlik darajasiga ega Styudent-t taqsimotining ehtimollik zichlik funksiyasi;

T_{v+1} – $(v+1)$ erkinlik darajasiga ega Styudent-t taqsimotining taqsimot funksiyasi.

O'rtachasi ξ va standart chetlanishi ω bo'lgan umumiy z egri-t taqsimoti ko'rinishdagi tasodifiy miqdorning ehtimollik zichlik funksiyasi qo'yidagicha bo'ladi:

$$f_{v,\beta}\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) = 2t_v\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)T_{v+1}\left(\beta \frac{x-\xi}{\omega} \sqrt{\frac{v+1}{\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)^2+v}}\right)$$

$$z = \frac{x-\xi}{\omega}$$

Egri-t taqsimotining ehtimollik zichlik funksiyasi Styudent-t taqsimotining ehtimollik zichlik funksiya va Styudent-t taqsimotining taqsimot funksiyalari ko'paytmasidan hosil bo'ladi. Ushbu $f_{v,\beta}(x)$ ko'rinishdagi funksiyani ehtimollik

t – namuna hajmi;

$G(p)$ – Gamma funksiyasi.

zichlik funksiya⁶ ekanligini isbotlash uchun avval umumiy ko‘rinishdagi funksiyaga qaraladi.

X tasodifiy miqdor, $f(x)$ ehtimollik zichlik funksiyasi ordinataga nisbatan simmetrik, $G(x)$ esa ixtiyoriy taqsimot funksiya bo‘lsa, har qanday α uchun $f(x; \alpha) = 2f(x)G(\alpha x)$ ning ehtimollik zichlik funksiya bo‘lish quyidagicha isbotlanadi⁷:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \alpha) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(1 - G(-\alpha x)) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.
 \end{aligned}$$

Isbotlash jarayonida Styudent-t taqsimotining ehtimollik zichlik funksiyasi simmetriligi xossasidan $f(x) = f(-x)$ va taqsimot funksiyaning $F(-\alpha x) = 1 - F(\alpha x)$ xossasidan foydalanildi. Ushbu isbot umumiy ko‘rinishdagi funksiyalar uchun isbotlanganligi tufayli egri-t taqsimot uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Jumladan, standart egri-t taqsimoti, simmetrik bo‘lgan Styudent-t taqsimoti ehtimollik zichlik funksiyasi $t_v(x)$ va Styudent-t taqsimotining taqsimot funksiyasi $T_{v+1}\left(\beta x \sqrt{\frac{v+1}{x^2+v}}\right)$

⁶ Ehtimollik zichlik funksiya bo‘lish sharti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

⁷ Berlik, S. (2006). Directed Evolutionary Algorithms. Dortmund University.

ko‘paytmalaridan tashkil topgan. Standart egri-t taqsimoti uchun o‘rinli bo‘lgan bu jarayon umumiy egri-t taqsimoti uchun ham o‘rinli hisoblanadi.

Baholangan kvantil regressiya qiymatlari va egri-t taqsimotining teskari taqsimot funksiyasi orasidagi kvadratik farqni minimallashtirish yordamida noma’lum parametrlarning optimal bahosi topiladi:

$$\{\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{v}\} = \underset{q}{argmin} \sum \left(\hat{Q}_{y_{t+h}|x_t}(q|x_t) - F^{-1}(\xi, \omega, \alpha, v) \right)^2$$

Bu yerda,

$\hat{Q}_{y_{t+h}|x_t}(q|x_t)$ – kvantil regressiya yordamida baholangan qiymatlar;

$F^{-1}(\xi, \omega, \alpha, v)$ – egri-t taqsimotining teskari taqsimot funksiyasi.

Kvadratik farqni minimallashtiradigan to‘rtta parametrlarni topgan holda, egri-t taqsimotini moslashtirish mumkin. Bunda minimallashtirish masalasini hal qilish uchun egri-t taqsimotining teskari taqsimot funksiyasini parametrlarga bog‘liq holdagi ko‘rinishi kerak bo‘ladi. Egri-t taqsimotining teskari taqsimot funksiyasini Kornish-Fisher kengaytmasi (Kornish-Fisher expansion) yordamida aniqlash mumkin⁸. Jumladan, Kornish-Fisher kengaytmasining momentlarga asoslangan kengaytmasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) \approx & z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)E(x^3) + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})E(x^4) \\ & - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})E(x^3)^2 + \frac{1}{120}(z_{\alpha}^4 - 6z_{\alpha}^2 + 3)E(x^5) \\ & - \frac{1}{24}(z_{\alpha}^4 - 5z_{\alpha}^2 + 2)E(x^3)E(x^4) + \frac{1}{324}(12z_{\alpha}^4 - 53z_{\alpha}^2 + 17)E(x^3)^3 \\ & + \frac{1}{720}(z_{\alpha}^5 - 10z_{\alpha}^3 + 15z_{\alpha})E(x^6) - \frac{1}{180}(2z_{\alpha}^5 - 17z_{\alpha}^3 + 21z_{\alpha})E(x^3)E(x^5) \\ & - \frac{1}{384}(3z_{\alpha}^5 - 24z_{\alpha}^3 + 29z_{\alpha})E(x^4)^2 \end{aligned}$$

⁸ Amedee-Manesme, C., & Barthelemy, F. (2012). Cornish-Fisher Expansion for Real Estate Value at Risk. CergyPontoise University.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{288} (14z_{\alpha}^5 - 103z_{\alpha}^3 + 107z_{\alpha}) E(x^3)^2 E(x^4) \\
& - \frac{1}{7776} (252z_{\alpha}^5 - 1688z_{\alpha}^3 + 1511z_{\alpha}) E(x^3)^4 + \dots
\end{aligned}$$

Bu yerda,

z_{α} – standart normal taqsimotning teskari taqsimot funksiyasi;

$E(x^n)$ – n tartibli momentlar.

Taqsimotning dastlabki to‘rtta momentidan foydalanganda quyidagi taqribiy tenglik hosil bo‘ladi:

$$\begin{aligned}
F^{-1}(x) \approx & z_{\alpha} + \frac{1}{6} (z_{\alpha}^2 - 1) E(x^3) + \frac{1}{24} (z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha}) E(x^4) \\
& - \frac{1}{36} (2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha}) E(x^3)^2.
\end{aligned}$$

Umumiy egri-t taqsimoti va standart egri-t taqsimoti orasidagi bog‘liqlik quyidagi ko‘rinishga ega⁹:

$$Y_{\xi, \omega, \alpha, v} = \xi + \omega Y_{0, 1, \alpha, v}$$

Bu yerda,

$Y_{0, 1, \alpha, v}$ – standart egri-t taqsimoti;

$Y_{\xi, \omega, \alpha, v}$ – umumiy egri-t taqsimoti.

Standart egri-t taqsimotining variatsiyasini aniqlashda belgilashlar kiritiladi:

$$b_v = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{G\left(\frac{v-1}{2}\right)}{G\left(\frac{v}{2}\right)}$$

⁹ Uthaisaad, Ch., & Martin, D. (2018). The Azzalini Skew-t Information Matrix Evaluation and Use for Standard Error Calculations. SSRN.

$$\delta_\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Ushbu belgilashlardan so‘ng $(-\infty; +\infty)$ orasida o‘zgaruvchi α egrilik koeffitsiyenti $(-1; +1)$ orasida o‘zgaruvchi bo‘lib qoladi. Shundan so‘ng standart egri-t taqsimotining variatsiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sigma_z^2 = \text{var}(z) = \frac{v}{v-2} - (b_v \delta_\alpha)^2$$

Egri-t taqsimot parametrlar vektorini (ξ, ω, α, v) odatdagi o‘rtacha, standart og‘ish, egrilik va kurtozis vektoriga $(\mu, \sigma, \gamma, \kappa)$ o‘zgartirish quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned}\mu &= \xi + \omega b_v \delta_\alpha \\ \sigma^2 &= \omega^2 \sigma_z^2, \quad v > 2 \\ \gamma &= \frac{b_v \delta_\alpha}{\sigma^3} \left[\frac{v(3 - \delta_\alpha^2)}{v-3} - \frac{3v}{v-2} + 2(b_v \delta_\alpha)^2 \right], \quad v > 3 \\ \kappa &= \frac{1}{\sigma_z^4} \left[\frac{3v^2}{(v-2)(v-4)} - \frac{4(b_v \delta_\alpha)^2 v(3 - \delta_\alpha^2)}{v-3} + \frac{6v(b_v \delta_\alpha)^2}{v-2} - 3(b_v \delta_\alpha)^4 \right] - 3, \\ &\quad v > 4.\end{aligned}$$

Belgilashlar yordamida Kornish-Fisher kengaytmasi olinadi va egri-t taqsimotining taxminiy teskari taqsimot funksiyasi hosil bo‘ladi. Bu taxminiy teskari egri-t taqsimotini minimallashtirish muammosiga qo‘yilib egri-t taqsimotining noma’lum parametrlari aniqlanadi. O‘rnatilgan egri-t taqsimotining bir foiz ehtimollik qiymati aniqlanib, GaR modelining qiymati sifatida belgilanadi. Shu tariqa GaR modelining oxirgi bosqichi yakunlanadi.