

## State space model (SSM)

R. Maxammadiyev, U. Djumanazarov, Sh. Mahmudov,  
S. Abdug'aniyev

Ushbu maqoladagi qarashlar mualliflarning shaxsiy fikr va mulohazalari bo'lib, O'zbekiston Respublikasi Markaziy bankining rasmiy pozitsiyasi bilan mos kelmasligi mumkin. O'zbekiston Respublikasi Markaziy banki maqola mazmuniga javobgarlik olmaydi. Taqdim qilingan materiallarni har qanday uslubda qayta ishlatish faqatgina mualliflar ruxsati bilan amalga oshiriladi.

### Annotatsiya

Ushbu maqolada kuzatiladigan (observable variables) va mavhum o'zgaruvchilarning (unobservable variables) o'zaro bog'liqlik darajasini ifodalovchi tenglamalardan tashkil topgan state space model (SSM) modeli yoritilgan. Xususan, o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'liqliklarni ifodalovchi noma'lum koeffitsiyentlar Kalman filtridan foydalangan holda maksimal ehtimollik orqali (maximum likelihood) baholanadi. Mazkur maqola xalqaro tajribalarni o'rgangan holda ko'chmas mulk bozori holatini to'laqonli tahlil qilish uchun uy-joy narxlarining fundamental qiymatini aniqlash bo'yicha qo'shimcha modeldan foydalanish imkoniyatlarini baholash maqsadida tayyorlangan.

**Tayanch so'zlar:** Bayes teoremasi, Kalman filtri, kovariatsiya matritsasi, maksimal ehtimollik, zichlik funksiyasi.

## State space model (SSM)

State space model (SSM)<sup>1</sup> o'zgaruvchilar o'rtasidagi chiziqli bog'liqlik funksiyasini aniqlash orqali erksiz o'zgaruvchi qiymatini nazariy baholashga xizmat qiladi. Ushbu model kuzatiladigan (observable variables) va mavhum o'zgaruvchilarning (unobservable variables) o'zaro bog'liqlik darajasini ifodalovchi kuzatish tenglamasi (observable or measurement equation) hamda dinamik holat o'zgaruvchilarini ifodalovchi o'tish tenglamasidan (transition equation) tashkil topadi:

$$\begin{aligned}y_t &= H_t z_t + G_t x_t + v_t \\z_t &= B_{t-1} z_{t-1} + F_{t-1} x_{t-1} + w_{t-1}\end{aligned}$$

Bu yerda,  $y_t$  – kuzatilishi mumkin bo'lgan erksiz o'zgaruvchilar vektori,  $x_t$  – kuzatilishi mumkin bo'lgan erkli o'zgaruvchilar vektori,  $z_t$  – mavhum o'zgaruvchilar vektori,  $v_t$  – kuzatish tenglamasi uchun nisbiy xatolik vektori,  $w_t$  – o'tish tenglamasi uchun nisbiy xatolik vektori,  $H_t, G_t, B_t, F_t$  – noma'lum koeffitsiyentlar matritsalarini.

Ushbu modeldagi erkli, erksiz va mavhum o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'liqliklarni ifodalovchi noma'lum koeffitsiyentlar Kalman filtridan foydalangan holda maksimal ehtimollik orqali (maximum likelihood) baholanadi.

### Kalman filtri

Kalman filtri matematik algoritmi bo'lib, noma'lum mavhum o'zgaruvchilarni kuzatish imkoni bo'lgan o'zgaruvchilar bilan rekursiv baholash imkonini beradi. Bunda, Kalman filtri orqali har bir  $t$  davr uchun shu davrgacha bo'lgan ma'lumotlarga bog'liq bo'lgan shartli kutilayotgan mavhum o'zgaruvchilar  $z_{t|t}$  vektori va shartli kovariatsiya matritsasi  $\Omega_{t|t}$  qiymatlari aniqlanadi.

Kalman filtri rekursiyalarini ifodalashda quyidagi qo'shimcha belgilardan foydalanadi:

$$\begin{aligned}z_{t|s} &:= E(z_t | y_1, \dots, y_s), \\ \Sigma_z(t|s) &:= Cov(z_t | y_1, \dots, y_s), \\ y_{t|s} &:= E(y_t | y_1, \dots, y_s), \\ \Sigma_y(t|s) &:= Cov(y_t | y_1, \dots, y_s),\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Lütkepohl, H. (2005). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer Science & Business Media.

$$(z|y) \sim N(\mu, \Sigma).$$

Belgilangan shartlar asosida o'zgaruvchilarning normal taqsimlanganlik farazi ilgari suriladi:

$$\begin{aligned} (z_t | y_1, \dots, y_{t-1}) &\sim N(z_{t|t-1}, \Sigma_z(t|t-1)), t = 2, \dots, T \\ (z_t | y_1, \dots, y_t) &\sim N(z_{t|t}, \Sigma_z(t|t)), t = 1, \dots, T \\ (y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) &\sim N(y_{t|t-1}, \Sigma_y(t|t-1)), t = 2, \dots, T \\ (z_t | y_1, \dots, y_T) &\sim N(z_{t|T}, \Sigma_z(t|T)) \\ (y_t | y_1, \dots, y_T) &\sim N(y_{t|T}, \Sigma_y(t|T)), t > T. \end{aligned}$$

Mavhum o'zgaruvchilar va kovariatsiya matritsalarini Kalman filtri ishga tushirilgandan so'ng baholash, tuzatish va prognozlashtirish bosqichlari orqali aniqlanadi.

Mavhum o'zgaruvchilar va kovariatsiya matritsalarining dastlabki qiymatlarini kiritish orqali Kalman filtri ishga tushiriladi:

$$z_{0|0} := \mu_0, \Sigma_z(0|0) := \Sigma_0$$

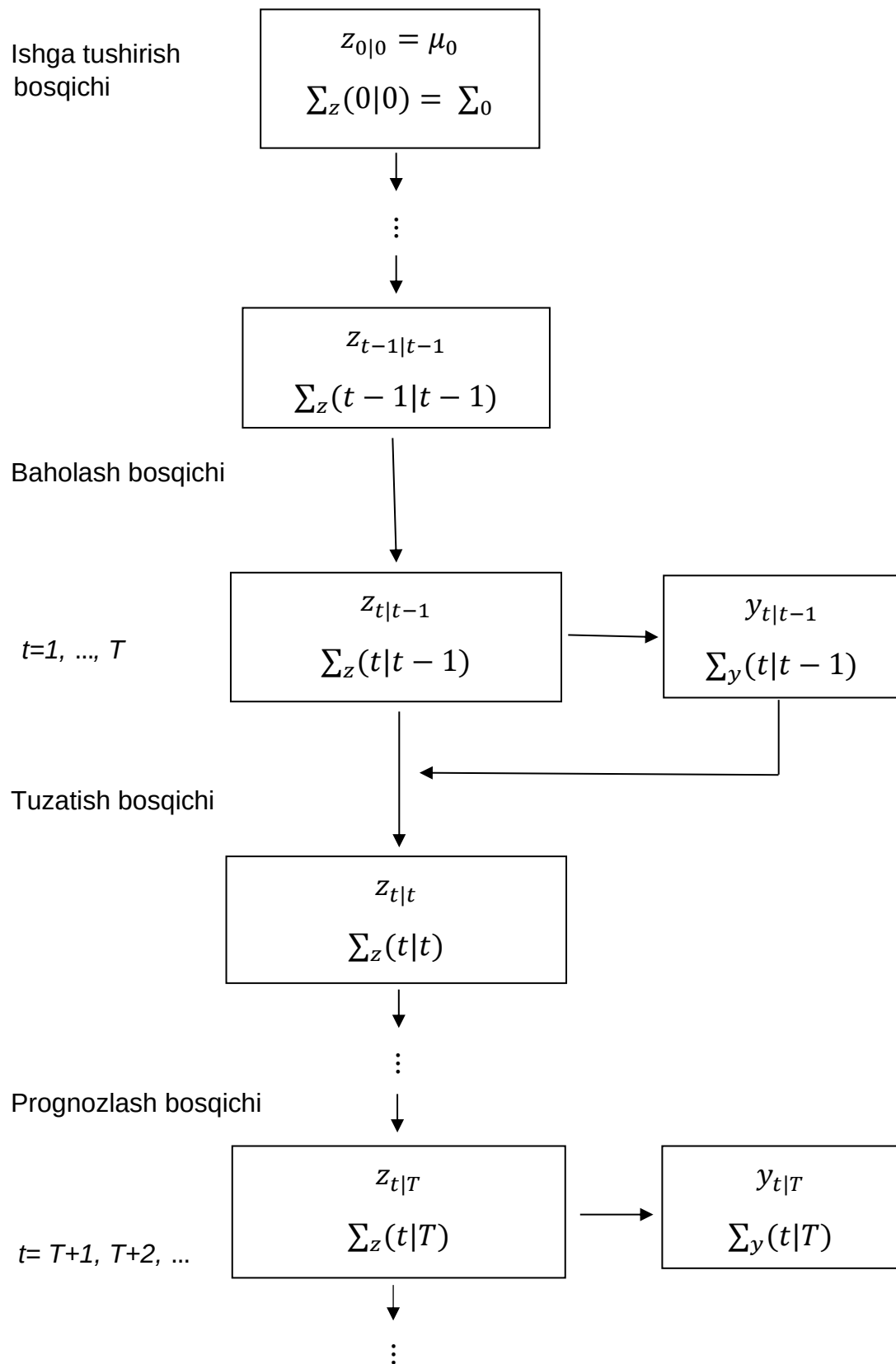
Kalman filtrining baholash bosqichi ( $1 \leq t \leq T$ ):

$$\begin{aligned} z_{t|t-1} &= Bz_{t-1|t-1} + Fx_{t-1}, \\ \Sigma_z(t|t-1) &= B \Sigma_z(t-1|t-1) B' + \Sigma_w, \\ y_{t|t-1} &= H_t z_{t|t-1} + Gx_t, \\ \Sigma_y(t|t-1) &= H_t \Sigma_z(t|t-1) H_t' + \Sigma_v. \end{aligned}$$

Kalman filtrining tuzatish bosqichi ( $1 \leq t \leq T$ ):

$$\begin{aligned} z_{t|t} &= z_{t|t-1} + P_t(y_t - y_{t|t-1}), \\ \Sigma_z(t|t) &= \Sigma_z(t|t-1) - P_t \Sigma_y(t|t-1) P_t', \\ P_t &:= \Sigma_z(t|t-1) H_t' \Sigma_y(t|t-1)^{-1}. \end{aligned}$$

## 1-chizma. Kalman filtri algoritmi



Manba: Lütkepohl, H. (2005). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer Science & Business Media.

Kalman filtri ishga tushirilgandan so'ng  $t = 1$  davr uchun baholash va tuzatish bosqichlari amalga oshiriladi. Keyingi davrlar uchun ham baholash va tuzatish bosqichlari ketma-ket takrorlanadi.

Kalman filtrining so'nggi prognozlashtirish bosqichi  $t > T$ :

$$\begin{aligned} z_{t|T} &= Bz_{t-1|T} + Fx_{t-1}, \\ \Sigma_z(t|T) &= B \Sigma_z(t-1|T) B' + \Sigma_w, \\ y_{t|T} &= H_t z_{t|T} + Gx_t, \\ \Sigma_y(t|T) &= H_t \Sigma_z(t|T) H_t' + \Sigma_v. \end{aligned}$$

Prognozlashtirish bosqichi  $t = T + 1, T + 2, \dots$  uchun rekursiv ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Kalman filtri bosqichlarida foydalanilgan noma'lum parametrlar vektorlari maksimal ehtimollik funksiyasi (maximum likelihood function) yordamida baholanadi.

### **Maksimal ehtimollikni baholash (Maximum likelihood estimation)**

Noma'lum parametrlardan tashkil topgan  $\delta(B, F, G, H_t, \Sigma_w, \Sigma_v, \Sigma_0, \mu_0)$  vaqt bo'yicha o'zgarmas vektori yagona aniqlangan hamda elementlari bo'yicha kamida ikki marta differensiallanuvchi hisoblanadi.

Noma'lum parametrlarni aniqlash uchun dastlab logarifmik ehtimollik funksiyasi (log-likelihood function) yaratilib, ushbu funksiyaning maksimal qiymati baholanadi.

Bayes teoremasiga ko'ra umumiy ko'rinishdagi zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_T; \delta) &= f(y_1; \delta) f(y_2, \dots, y_T | y_1; \delta) \\ &\vdots \\ &= f(y_1; \delta) f(y_1 | y_2; \delta) \cdots f(y_T | y_1, \dots, y_{T-1}; \delta). \end{aligned}$$

Shuningdek,  $K$  o'lchovli  $y_t$  uchun Gauss logarifmik ehtimollik funksiyasi zichlik funksiyalari ko'paytmasining logarifmlangan qiymati orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\ln l(\delta | y_1, \dots, y_T) = \ln f(y_1, \dots, y_T; \delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln f(y_1; \delta) + \sum_{t=2}^T \ln f(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}; \delta) \\
&= -\frac{KT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\Sigma_y(t|t-1)| \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t - y_{t|t-1})' \Sigma_y(t|t-1)^{-1} (y_t - y_{t|t-1})
\end{aligned}$$

Ushbu logarifmik ehtimollik funksiyasida boshlang'ich qiymatlar sifatida quyidagilardan foydalaniladi:

$$\begin{aligned}
y_{1|0} &:= E(y_1) \\
\Sigma_y(1|0) &:= Cov(y_1) \\
(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}) &\sim \mathcal{N}(y_{t|t-1}, \Sigma_y(t|t-1)) \\
t &= 1, \dots, T
\end{aligned}$$

Noma'lum parametrlar bo'yicha  $\delta$  vektorni aniqlagandan so'ng logarifmik ehtimollik funksiyadagi barcha o'zgaruvchilar Kalman filtri rekursiv algoritmi orqali baholanadi.

Logarifmik ehtimollik funksiyasi ko'rinishini soddalashtirish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi:

$$\begin{aligned}
e_t(\delta) &:= y_t - y_{t|t-1} \\
\Sigma_t(\delta) &:= \Sigma_y(t|t-1)
\end{aligned}$$

Kiritilgan belgilashlar orqali logarifmik ehtimollik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\ln l(\delta) = -\frac{KT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\ln |\Sigma_t(\delta)| + e_t(\delta)' \Sigma_t(\delta)^{-1} e_t(\delta)]$$

Logarifmik ehtimollik funksiyasini maksimal qiymatlaridagi noma'lum parametrlarni baholashning turli usullari mavjud. Jumladan, noma'lum parametrlarga nisbatan xususiy hosilalar olib nolga tenglash orqali logarifmik ehtimollikni maksimallashtiruvchi parametrlar qiymatlari aniqlanishi mumkin.