

Umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastik (GARCH) modeli

R. Maxammadiyev, U. Djumanazarov, Sh. Mahmudov

Ushbu maqoladagi qarashlar mualliflarning shaxsiy fikr va mulohazalari bo'lib, O'zbekiston Respublikasi Markaziy bankining rasmiy pozitsiyasi bilan mos kelmasligi mumkin. O'zbekiston Respublikasi Markaziy banki maqola mazmuniga javobgarlik olmaydi. Taqdim qilingan materiallarni har qanday uslubda qayta ishlatish faqatgina mualliflar ruxsati bilan amalga oshiriladi.

Annotatsiya

Ushbu maqolada heteroskedastik va avtoregressiv indikatorlarning shartli dispersiyalarini aniqlashda umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastik (GARCH) modeli yoritilgan. Xususan, GARCH modelida noma'lum parametrlar maksimal ehtimollik funksiyasi (maximum likelihood function) yordamida baholanadi. Mazkur maqola maxsus modellar orqali mamlakat moliyaviy ko'rsatkichlaridagi o'zgaruvchanlik darajasini baholashni takomillashtirish maqsadida tayyorlangan.

Tayanch so'zlar: avtoregressiv, heteroskedastik, kalman filtri, maksimal ehtimollik, nisbiy xatolik, shartli dispersiya.

Umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastik (GARCH) modeli

Avtoregressiv shartli heteroskedastik (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, ARCH) modeli umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastik (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) modeli¹ ko'rinishiga kengaytirilgan. Ushbu model orqali heteroskedastik² va avtoregressiv³ indikatorlarning shartli dispersiyalarini aniqlanadi. Shuningdek, model shartli dispersiyalarga asoslangan bo'lib, ushbu shartli dispersiya o'tgan vaqt qatoridagi kvadratik qiymatlarining chiziqli funksiyasi sifatida ifodalanadi.

GARCH(p, q) modeliga ko'ra quyidagilar bajariladi:

- (1) $E(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = 0, \quad t \in Z.$
- (2) $\sigma_t^2 = Var(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$
- (3) $t \in Z \quad \epsilon_t = \sigma_t n_t$

Bu yerda, ϵ – nisbiy xatolik (residual), σ^2 – shartli dispersiya, α va β manfiy bo'lmagan hamda ω qat'iy musbat o'zgarmas koeffitsiyentlar, p va q indikatorga tegishli ARCH (indikatoridagi o'zgarish) va GARCH (shartli dispersiya) oldingi qiymatlarini ifodalovchi laglar (lags), n – o'rtacha qiymati 0 va dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan, hamda mustaqil va tekis taqsimlangan tasodifiy o'zgaruvchi ("independent and identically distributed random variable with mean zero and unit variance").

GARCH(1, 1) modeli GARCH(p, q) ning xususiy holi hisoblanib quyidagi ko'rinishga ega ($p=q=1$):

$$\begin{cases} \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \epsilon_t = \sigma_t n_t \end{cases}$$

Bu yerda, σ^2 – shartli dispersiya, α va β – manfiy bo'lmagan o'zgarmas koeffitsiyentlar, ω – qat'iy musbat o'zgarmas koeffitsiyent, ϵ – nisbiy xatolik

¹ Francq, C., & Zakoian, J.-M. (2010). GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications.

² Tasodifiy o'zgaruvchilar ketma-ketligining chekli dispersiyasi ortib borsa, ushbu o'zgaruvchilar heteroskedastik hisoblanadi.

³ Oldingi davrdagi nisbiy xatoliklarning joriy davrdagi nisbiy xatoliklarga aloqador bo'lgan indikator.

(residual), n_t – o'rtacha qiymati 0 va dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan, hamda mustaqil va tekis taqsimlangan tasodifiy o'zgaruvchi.

GARCH parametrlari maksimal ehtimollik funksiyasi (maximum likelihood function) yordamida baholanadi.

Maksimal ehtimollik funksiyasi (Maximum likelihood function)

Indikator vaqt oralig'idagi qiymatlari orasidagi logarifmik farqlar (log returns) qatori $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$ o'zgarmas (fixed) deb olinsa, uning $\theta (\omega, \alpha, \beta)$ parametrlar vektori bilan birgalikdagi ehtimollikning zichlik funksiyasi (joint probability density function) quyidagicha ifodalanadi:

$$f(r_t, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) = f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) \times \dots \times f(r_2 | r_1; \theta) \times f(r_1; \theta)$$

Yuqoridagi tenglamaga asosan umumiy ehtimollik funksiyasi (general likelihood function) $L(\theta; r_t)$ keltirilishi mumkin:

$$L(\theta; r_t) = \prod_{t=1}^T f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1; \theta).$$

Umumiy ehtimollik funksiyasidan ko'ra logarifmik ehtimollik funksiyasidan (log-likelihood function) amaliyotda keng foydalaniladi:

$$l(\theta; r_t) = \prod_{t=1}^T f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) = \sum_{t=1}^T \log f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1; \theta).$$

GARCH parametrlarini baholashda nisbiy xatolik (ϵ_t) muhim bo'lganligi sababli yuqoridagi tenglamada nisbiy xatolikdan foydalanish o'rinli bo'ladi. n_t ning taqsimot (distribution) faraziga ko'ra, GARCH(p, q) modelida normal nisbiy xatoliklar bilan $\epsilon_t = \sigma_t n_t \sim N(0; \sigma_t^2)$ ga erishilinadi. $t - 1$ davrgacha berilgan ma'lumotlardan foydalangan holda va $n_t \sim N(0; 1)$ dan kelib chiqib n_t ning taqsimot funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$f(n_t | n_{t-1}, \dots, n_0; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n_t^2}{2}\right).$$

Shuningdek, ϵ_t ning taqsimot funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$f(n_t | n_{t-1}, \dots, n_0; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

GARCH(p, q) modeli uchun quyidagi shartli logarifmik ehtimollik funksiyasi hisoblanadi:

$$\begin{aligned} l(\theta; \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_0) &= \sum_{t=1}^T \log f(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_0) = \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) = \\ &= \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2} \right] = \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2) + \frac{\epsilon_t^2}{\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2} \right]. \end{aligned}$$

Noma'lum parametrlarga (ω, α, β) nisbatan xususiy hosilalar olib nolga tenglash orqali logarifmik ehtimollikni maksimallashtiruvchi parametrlar qiymati aniqlanadi.