Умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастик (GARCH) модели

Р. Махаммадиев, У. Джуманазаров, Ш. Маҳмудов

Аннотация

Ушбу мақолада ҳетероскедастик ва авторегрессив индикаторларнинг шартли дисперсияларини аниқлашда умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастик (GARCH) модели ёритилган. Хусусан, GARCH моделида номаълум параметрлар максимал эҳтимоллик функцияси (maximum likelihood function) ёрдамида баҳоланади. Мазкур мақола махсус моделлар орқали мамлакат молиявий кўрсаткичларидаги ўзгарувчанлик даражасини баҳолашни такомиллаштириш мақсадида тайёрланган.

Таянч сўзлар: авторегрессив, ҳетероскедастик, калман фильтри, максимал эҳтимоллик, нисбий хатолик, шартли дисперсия.

Умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастик (GARCH) модели

Авторегрессив шартли ҳетероскедастик (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, ARCH) модели умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастик (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) модели[1] кўринишига кенгайтирилган. Ушбу модел орқали ҳетероскедастик[2] ва авторегрессив[3] индикаторларнинг шартли дисперсияларини аниқланади. Шунингдек, модел шартли дисперсияларга асосланган бўлиб, ушбу шартли дисперсия ўтган вақт қаторидаги квадратик қийматларининг чизиқли функцияси сифатида ифодаланади.

GARCH(*p, q*) моделига кўра қуйидагилар бажарилади:

(1) $E(\epsilon_t \mid \epsilon_u, u < t) = 0, \qquad t \in Z.$
(2) $\sigma_t^2 = Var(\epsilon_t \mid \epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-j}^2,$
(3) $t \in Z \ \epsilon_t = \sigma_t n_t$

Бу ерда, ϵ – нисбий хатолик (residual), σ^2 – шартли дисперсия, α ва β манфий бўлмаган ҳамда ω қаътий мусбат ўзгармас коэффициентлар, p ва q индикаторга тегишли ARCH (индикатордаги ўзгариш) ва GARCH (шартли дисперсия) олдинги қийматларини ифодаловчи лаглар (lags), n – ўртача қиймати 0 ва дисперсияси 1 га тенг бўлган, ҳамда мустақил ва текис тақсимланган тасодифий ўзгарувчи (“independent and identically distributed random variable with mean zero and unit variance”).

GARCH(1, 1) модели GARCH(*p, q*) нинг хусусий холи ҳисобланиб қуйидаги кўринишга эга (p=q=1):

$$\begin{cases} \sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\ \epsilon_t = \sigma_t n_t \end{cases}$$

[1] Francq, C., & Zakoian, J.-M. (2010). GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications.

[2] Тасодифий ўзгарувчилар кетма-кетлигининг чекли дисперсияси ортиб борса, ушбу ўзгарувчилар ҳетероскедастик ҳисобланади.

[3] Олдинги даврдаги нисбий хатоликларнинг жорий даврдаги нисбий хатоликларга алоқадор бўлган индикатор.

Бу ерда, σ^2 – шартли дисперсия, α ва β – манфий бўлмаган ўзгармас коэффициентлар, ω – қаътий мусбат ўзгармас коэффициент, ϵ – нисбий хатолик (residual), n_t – ўртача қиймати 0 ва дисперсияси 1 га тенг бўлган, ҳамда мустақил ва текис тақсимланган тасодифий ўзгарувчи.

GARCH параметрлари максимал эҳтимоллик функцияси (maximum likelihood function) ёрдамида баҳоланади.

Максимал эҳтимоллик функцияси (Maximum likelihood function)

Индикатор вақт оралиғидаги қийматлари орасидаги логарифмик фарқлар (log returns) қатори $\{r_1, r_2 \dots, r_T\}$ ўзгармас (fixed) деб олинса, унинг $\theta\,(\omega, \alpha, \beta\,)$ параметрлар вектори билан биргаликдаги эҳтимолликнинг зичлик функцияси (joint probability density function) қуйидагича ифодаланади:

$$f(r_t, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) = f(r_t |\, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) \times \dots \times f(r_2 |\, r_1; \theta) \times f(r_1; \theta)$$

Юқоридаги тенгламага асосан умумий эҳтимоллик функцияси (general likelihood function) $L(\theta; r_t)$ келтирилиши мумкин:

$$L(\theta; r_t) = \prod_{t=1}^{T} f(r_t |\, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta).$$

Умумий эҳтимоллик функциясидан кўра логарифмик эҳтимоллик функциясидан (log-likelihood function) амалиётда кенг фойдаланилади:

$$l(\theta; r_t) = \prod_{t=1}^{T} f(r_t |\, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta) = \sum_{t=1}^{T} \log f(r_t |\, r_{t-1}, \dots, r_1; \theta).$$

GARCH параметрларини баҳолашда нисбий хатолик (ϵ_t) муҳим бўлганлиги сабабли юқоридаги тенгламада нисбий хатоликдан фойдаланиш ўринли бўлади. n_t нинг тақсимот (distrubition) фаразига кўра, GARCH(*p*, *q*) моделида нормал нисбий хатоликлар билан $\epsilon_t = \sigma_t n_t \sim N(0; \sigma_t^2)$ га эришилинади. $t-1$ давргача берилган маълумотлардан фойдаланган ҳолда ва $n_t \sim N(0;1)$ дан келиб чиқиб n_t нинг тақсимот функцияси қуйидагича ифодаланади:

$$f(n_t|\, n_{t-1}, \dots, n_0; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n_t^2}{2}\right).$$

Шунингдек, ϵ_t нинг тақсимот функцияси қуйидагича ифодаланади:

$$f(n_t|\, n_{t-1}, \dots, n_0; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

GARCH(*p*, *q*) модели учун қуйидаги шартли логарифмик эҳтимоллик функцияси ҳисобланади:

$$l(\theta; \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_0) = \sum_{t=1}^{T} \log f(\epsilon_t|\, \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) =$$
$$\sum_{t=1}^{T} \left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right] =$$
$$-\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\textstyle\sum_{t=1}^{T}\left[\ln(\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2) + \frac{\epsilon_t^2}{\omega+\alpha\epsilon_{t-1}^2+\beta\sigma_{t-1}^2}\right].$$

Номаълум параметрларга (ω, α, β) нисбатан хусусий ҳосилалар олиб нолга тенглаш орқали логарифмик эҳтимолликни максималлаштирувчи параметрлар қиймати аниқланади.