

Хатарлар шароитида иқтисодий ўсиш модели (Growth at Risk, GaR)

Аннотация

Мазкур методологик асос жорий макромолиявий шароитларнинг мамлакатнинг келгуси даврдаги реал иқтисодий ўсишига таъсирини инобатга олган ҳолда хатарли сценарий бўйича кескин иқтисодий пасайиш эҳтимолини аниқлаш юзасидан тайёрланган. Бунда, хатарлар шароитида мамлакат иқтисодий ўсишини баҳолаш модели ёритилган. Хатарлар шароитида иқтисодий ўсиш модели таъсир этувчи кўрсаткичлар ва иқтисодий ўсиш ўртасидаги боғлиқликни квантил регрессия модели ёрдамида баҳолаш, шунингдек баҳоланган дискрет қийматларга эгри-т тақсимот функциясини мослаштириш босқичларидан иборат.

Таянч сўзлар: иқтисодий ўсиш, квантил, молиявий цикл индекси, нисбий хатолик, регрессия, тасодифий миқдор, тақсимот функцияси.

Хатарлар шароитида иқтисодий ўсиш модели (Growth at Risk, GaR)

Growth at Risk (GaR)¹ модели ҳозирги макромолиявий шароитларни келгуси даврдаги реал ЯИМ ўсиши билан боғлайди. Бу таҳлилнинг асосий устунлиги келгуси даврдаги реал ЯИМ ўсишининг бутун тақсимотини баҳолаш ҳисобланади. GaR моделидан фойдаланиб хатарли сценарийлар эҳтимолини миқдорий баҳолаш мумкин.

Молиявий тизим ҳолатидаги ўзгаришлар эволюцияси келгуси даврдаги иқтисодий фаолият учун ўзгариш даврларини аниқлаш имконини бериши мумкин. Жумладан, GaR модели кескин иқтисодий пасайиш эҳтимоли аниқлигини баҳолайди. Бунда, реал ЯИМнинг келгуси даврдаги ўсишининг тақсимоти макромолиявий ўзгарувчилар маълумотлари асосида баҳоланади.

GaR модели икки босқичда амалга оширилади. Биринчи босқичда макромолиявий ўзгарувчилар сифатида молиявий цикл индекси² ва жорий реал ЯИМ ўсиши, келгуси даврдаги реал ЯИМ ўсиши билан турли квантиллarda квантил регрессия модели ёрдамида баҳоланади. Иккинчи босқичда эса, квантил регрессия модели орқали баҳолангандан сўнг, реал ЯИМ келгуси даврдаги ўсишининг шартли узлуксиз тақсимланишини тахмин қилиш учун шартли квантил регрессияларининг баҳоланган дискрет қийматларига эгри-т (skew-t)³ тақсимот функцияси мослаштирилади.

Квантил регрессия баҳоси

GaR моделининг биринчи босқичи квантил регрессия моделини баҳолашни ўз ичига олади. Хусусан, жорий молиявий цикл индекси ҳамда жорий реал ЯИМ ўсишининг келгуси даврдаги реал ЯИМ ўсишига боғлиқлиги квантил регрессия модели ёрдамида баҳоланади. Квантил регрессия турли $q \in (10, 25, 50, 75, 90)$ квантиллarda баҳоланади ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_{t+h}^q = \alpha^q + \beta_C^q X_{C,t} + \beta_G^q X_{G,t} + \varepsilon_{t+h}^q$$

¹ Prasad, A., Elekdag, S., Jeasakul, P., Lafarguette, R., Alter, A., Xiaochen Feng, A., & Wang, Ch. (2019). Growth at Risk: Concept and Application in IMF Country Surveillance. IMF Working Paper.

² Молиявий цикл индекси методологияси Марказий банк методологик асосларида келтирилган.

³ Basalamah, D. (2017). Statistical Inference for a New Class of Skew T Distribution and Its Related Properties. Bowling Green State University.

Бу ерда,

q – квантил;

t – вақт қатори;

y_{t+h}^q – реал ЯИМнинг q квантилда h чорак кейинги даврдаги ўсиши;

$X_{C,t}$ – молиявий цикл индекси;

$X_{G,t}$ – реал ЯИМнинг жорий ўсиши;

α^q – ўзгармас сон;

ε_{t+h}^q – нисбий хатолик;

β_C^q, β_G^q – номаълум коэффициентлар.

Турли квантиллarda баҳолаб топилган квантил регрессия параметрлари ёрдамида кейинги давр учун квантил регрессиянинг баҳоланган дискрет қийматлари аниқланади. Бу дискрет қийматларга эгри-т тақсимотини мослаштириш орқали шартли узлуксиз тақсимот функция олинади.

Келгуси даврдаги ўсишнинг шартли узлуксиз тақсимотини олиш

Келгуси даврдаги реал ЯИМ ўсишининг турли квантиллари ҳисоблангандан сўнг, бутун шартли тақсимотни ҳам ҳисоблаш мумкин. GaR моделининг иккинчи босқичи келгуси даврдаги шартли реал ЯИМ ўсиш узлуксиз тақсимотини яратишни ўз ичига олади. Реал ЯИМнинг келгуси даврдаги ўсишини тақсимлаш шартли квантил регрессияларининг башорат қилинган қийматларига Аззалини ва Капитанионинг эгри-т тақсимотини мослаштириш орқали олинади⁴.

Аззалини ва Капитанионинг эгри-т тақсимоти ўртача, стандарт четланиш, эгрилик ва эркинлик даражаси параметрлари ёрдамида тавсифланади. Эгри-т тақсимоти Стюдент-т тақсимоти⁵ ёрдамида ҳосил қилинади. Бунда, ўртачаси нол

⁴ Drenkovska, M., & Volcjak, R. (2022). Growth-at-Risk and Financial Stability: Concept and Application for Slovenia. Banka Slovenije.

⁵ Стюдент-т тақсимотининг эҳтимоллик зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$t_v(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$
$$v = t - 1$$
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

ва стандарт четланиши бир бўлган стандарт эгри-т тақсимои асимметрик шаклда бўлиб, эҳтимоллик зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f_{v,\beta}(x) = 2t_v(x)T_{v+1}\left(\beta x \sqrt{\frac{v+1}{x^2+v}}\right)$$

Бу ерда,

β – эгрилик;

v – эркинлик даражаси;

$t_v(x)$ – (v) эркинлик даражасига эга Студент-т тақсимотининг эҳтимоллик зичлик функцияси;

T_{v+1} – ($v+1$) эркинлик даражасига эга Студент-т тақсимотининг тақсимот функцияси.

Ўртачаси ξ ва стандарт четланиши ω бўлган умумий z эгри-т тақсимои кўринишдаги тасодифий миқдорнинг эҳтимоллик зичлик функцияси қуйидагича бўлади:

$$f_{v,\beta}\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) = 2t_v\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)T_{v+1}\left(\beta \frac{x-\xi}{\omega} \sqrt{\frac{v+1}{\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)^2+v}}\right)$$

$$z = \frac{x-\xi}{\omega}$$

Бу ерда,

$t_v(x)$ – эҳтимоллик зичлик функцияси;

v – эркинлик даражаси;

t – намуна ҳажми;

$\Gamma(p)$ – Гамма функцияси.

Эгри-т тақсимотининг эҳтимоллик зичлик функцияси Студент-т тақсимотининг эҳтимоллик зичлик функция ва Студент-т тақсимотининг тақсимот функциялари кўпайтмасидан ҳосил бўлади. Ушбу $f_{v,\beta}(x)$ кўринишдаги функцияни эҳтимоллик зичлик функция⁶ эканлигини исботлаш учун аввал умумий кўринишдаги функцияга қаралади.

Х тасодифий миқдор, $f(x)$ эҳтимоллик зичлик функцияси ординатага нисбатан симметрик, $G(x)$ эса ихтиёрий тақсимот функция бўлса, ҳар қандай α учун $f(x; \alpha) = 2f(x)G(\alpha x)$ нинг эҳтимоллик зичлик функция бўлиш қуйидагича исботланади⁷:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \alpha) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(1 - G(-\alpha x)) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(\alpha x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.
 \end{aligned}$$

Исботлаш жараёнида Студент-т тақсимотининг эҳтимоллик зичлик функцияси симметрилиги хоссасидан $f(x) = f(-x)$ ва тақсимот функциянинг $F(-\alpha x) = 1 - F(\alpha x)$ хоссасидан фойдаланилди. Ушбу исбот умумий кўринишдаги функциялар учун исботланганлиги туфайли эгри-т тақсимот учун

⁶ Эҳтимоллик зичлик функция бўлиш шarti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

⁷ Berlik, S. (2006). Directed Evolutionary Algorithms. Dortmund University.

хам ўринли бўлади. Жумладан, стандарт эгри-т тақсимоти, симметрик бўлган Студент-т тақсимоти эҳтимоллик зичлик функцияси $t_v(x)$ ва Студент-т тақсимотининг тақсимот функцияси $T_{v+1}\left(\beta x \sqrt{\frac{v+1}{x^2+v}}\right)$ кўпайтмаларидан ташкил топган. Стандарт эгри-т тақсимоти учун ўринли бўлган бу жараён умумий эгри-т тақсимоти учун ҳам ўринли ҳисобланади.

Баҳоланган квантил регрессия қийматлари ва эгри-т тақсимотининг тескари тақсимот функцияси орасидаги квадратик фарқни минималлаштириш ёрдамида номаълум параметрларнинг оптимал баҳоси топилади:

$$\{\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{v}\} = \underset{q}{\operatorname{argmin}} \sum \left(\hat{Q}_{y_{t+h}|x_t}(q|x_t) - F^{-1}(\xi, \omega, \alpha, v) \right)^2$$

Бу ерда,

$\hat{Q}_{y_{t+h}|x_t}(q|x_t)$ – квантил регрессия ёрдамида баҳоланган қийматлар;

$F^{-1}(\xi, \omega, \alpha, v)$ – эгри-т тақсимотининг тескари тақсимот функцияси.

Квадратик фарқни минималлаштирадиган тўртта параметрларни топган ҳолда, эгри-т тақсимотини мослаштириш мумкин. Бунда минималлаштириш масаласини ҳал қилиш учун эгри-т тақсимотининг тескари тақсимот функциясини параметрларга боғлиқ ҳолдаги кўриниши керак бўлади. Эгри-т тақсимотининг тескари тақсимот функциясини Корниш-Фишер кенгайтмаси (Kornish-Fisher expansion) ёрдамида аниқлаш мумкин⁸. Жумладан, Корниш-Фишер кенгайтмасининг моментларга асосланган кенгайтмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) \approx & z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)E(x^3) + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})E(x^4) \\ & - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})E(x^3)^2 + \frac{1}{120}(z_{\alpha}^4 - 6z_{\alpha}^2 + 3)E(x^5) \\ & - \frac{1}{24}(z_{\alpha}^4 - 5z_{\alpha}^2 + 2)E(x^3)E(x^4) + \frac{1}{324}(12z_{\alpha}^4 - 53z_{\alpha}^2 + 17)E(x^3)^3 \end{aligned}$$

⁸ Amedee-Manesme, C., & Barthelemy, F. (2012). Cornish-Fisher Expansion for Real Estate Value at Risk. CergyPontoise University.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{720} (z_{\alpha}^5 - 10z_{\alpha}^3 + 15z_{\alpha}) E(x^6) - \frac{1}{180} (2z_{\alpha}^5 - 17z_{\alpha}^3 + 21z_{\alpha}) E(x^3) E(x^5) \\
& - \frac{1}{384} (3z_{\alpha}^5 - 24z_{\alpha}^3 + 29z_{\alpha}) E(x^4)^2 \\
& + \frac{1}{288} (14z_{\alpha}^5 - 103z_{\alpha}^3 + 107z_{\alpha}) E(x^3)^2 E(x^4) \\
& - \frac{1}{7776} (252z_{\alpha}^5 - 1688z_{\alpha}^3 + 1511z_{\alpha}) E(x^3)^4 + \dots
\end{aligned}$$

Бу ерда,

z_{α} – стандарт нормал тақсимотнинг тескари тақсимот функцияси;

$E(x^n)$ – n тартибли моментлар.

Тақсимотнинг дастлабки тўртта моментидан фойдаланганда қуйидаги тақрибий тенглик ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned}
F^{-1}(x) \approx & z_{\alpha} + \frac{1}{6} (z_{\alpha}^2 - 1) E(x^3) + \frac{1}{24} (z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha}) E(x^4) \\
& - \frac{1}{36} (2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha}) E(x^3)^2.
\end{aligned}$$

Умумий эгри-т тақсимоти ва стандарт эгри-т тақсимоти орасидаги боғлиқлик қуйидаги кўринишга эга⁹:

$$Y_{\xi, \omega, \alpha, v} = \xi + \omega Y_{0, 1, \alpha, v}$$

Бу ерда,

$Y_{0, 1, \alpha, v}$ – стандарт эгри-т тақсимоти;

$Y_{\xi, \omega, \alpha, v}$ – умумий эгри-т тақсимоти.

Стандарт эгри-т тақсимотининг вариациясини аниқлашда белгилашлар киритилади:

⁹ Uthaisaad, Ch., & Martin, D. (2018). The Azzalini Skew-t Information Matrix Evaluation and Use for Standard Error Calculations. SSRN.

$$b_v = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\delta_\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Ушбу белгилашлардан сўнг $(-\infty; +\infty)$ орасида ўзгарувчи α эгрилик коэффиценти $(-1; +1)$ орасида ўзгарувчи бўлиб қолади. Шундан сўнг стандарт эгри-т тақсимотининг вариацияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\sigma_z^2 = \text{var}(z) = \frac{v}{v-2} - (b_v \delta_\alpha)^2$$

Эгри-т тақсимот параметрлар векторини (ξ, ω, α, v) одатдаги ўртача, стандарт оғиш, эгрилик ва куртозис векторига $(\mu, \sigma, \gamma, \kappa)$ ўзгартириш қуйидагича бўлади:

$$\mu = \xi + \omega b_v \delta_\alpha$$

$$\sigma^2 = \omega^2 \sigma_z^2, \quad v > 2$$

$$\gamma = \frac{b_v \delta_\alpha}{\sigma^3} \left[\frac{v(3 - \delta_\alpha^2)}{v-3} - \frac{3v}{v-2} + 2(b_v \delta_\alpha)^2 \right], \quad v > 3$$

$$\kappa = \frac{1}{\sigma_z^4} \left[\frac{3v^2}{(v-2)(v-4)} - \frac{4(b_v \delta_\alpha)^2 v(3 - \delta_\alpha^2)}{v-3} + \frac{6v(b_v \delta_\alpha)^2}{v-2} - 3(b_v \delta_\alpha)^4 \right] - 3,$$

$$v > 4.$$

Белгилашлар ёрдамида Корниш-Фишер кенгайтмаси олинади ва эгри-т тақсимотининг тахминий тескари тақсимот функцияси ҳосил бўлади. Бу тахминий тескари эгри-т тақсимотини минималлаштириш муаммосига қўйилиб эгри-т тақсимотининг номаълум параметрлари аниқланади. Ўрнатилган эгри-т тақсимотининг бир фоиз эҳтимоллик қиймати аниқланиб, GaR моделининг қиймати сифатида белгиланади. Шу тариқа GaR моделининг охирги босқичи яқунланади.