

Квантил регрессия модели

Аннотация

Мазкур методологик асос Ўзбекистон кўчмас мулк бозори ҳолатини таҳлил қилишда уй-жой нархларининг фундаментал қийматини янада аниқроқ баҳолашда қўлланиладиган моделлар қамровини кенгайтириш юзасидан тайёрланган. Бунда, кўрсаткичлар нисбий хатоликлари нормал тақсимланмаган ва кузатув даври давомида кескин фарқ қиладиган қийматлар мавжуд ҳолатларда ҳам кўрсаткичлар таъсирини аниқроқ баҳолашда фойдаланиладиган квантил регрессия модели ёритилган. Хусусан, квантил регрессия модели параметрлари шартли квантил функциясининг номаълум параметрларини баҳолашда нисбий хатоликларнинг абсолют қийматларининг вазнли йиғиндисини минималлаштириш орқали аниқланади.

Таянч сўзлар: абсолют, квантил, нисбий хатолик, регрессия, симплекс жадвал, ўзгарувчи, шартли ўртача.

Квантил регрессия модели

Регрессия таҳлилининг мақсади эрксиз ўзгарувчи ва эркли ўзгарувчилар орасидаги боғлиқликни кўрсатишдан иборат. Классик чизиқли регрессия модели шартли ўртачани моделлаштиради¹. Шартли ўртачани моделлаштириш жараёни энг кичик квадратлар усулига олиб келиниб, ҳисоблаш жараёни содда кўринишга ўтказилади. Кичик квадратлар усули орқали регрессион таҳлил ўтказишда кўрсаткичларнинг нисбий хатоликлари нормал бўлмаслиги ва кузатув даври давомида нисбатан кескин фарқ қиладиган даврларнинг бўлиши натижалар аниқлигининг пасайишига, яъни нисбий хатоликлар юқори бўлишига олиб келиши мумкин. Шу сабабли, регрессион таҳлил ўтказишда кичик квадратлар модели ўрнига квантил регрессия (quantile regression) моделидан фойдаланиш натижалар аниқлигини оширади².

Квантил регрессия модели параметрлари шартли квантил функциясининг номаълум параметрларини баҳолашда нисбий хатоликларнинг абсолют қийматлари вазнли йиғиндисининг энг кичик қийматини баҳолаш орқали аниқланади. Квантил регрессия модели шартли квантиллардаги ўзгаришларни баҳолайди. Шартли медиан регрессияси, квантил регрессиянинг алоҳида ҳолати бўлиб, унда шартли марказий, яъни 50-квантил функцияси сифатида моделлаштирилади. Умуман олганда, тақсимотнинг марказий бўлмаган позицияларини тавсифлаш учун бошқа ҳар қандай квантиллардан фойдаланиб, турли квантилларда эркли ва эрксиз ўзгарувчилар орасидаги боғлиқлик учун таҳлил ўтказиш мумкин.

Квантил регрессия модели тенгламаси оддий чизиқли регрессия тенгламасидан фарқ қилмайди. Квантил регрессия моделининг регрессия тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_i = x_i\beta_q + \varepsilon_i$$

Бу ерда,

y_i – $n \times 1$ ўлчамли эрксиз ўзгарувчилар вектори;

x_i – $n \times k$ ўлчамли эркли ўзгарувчилар матрицаси;

β_i – $k \times 1$ ўлчамли номаълум параметрлар вектори;

¹ Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2017). The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. Springer Series in Statistics.

² Cameron, A., & Trivedi, P. (2005). Microeconometrics: Methods and Applications. Cambridge University Press.

$\varepsilon_i - nx1$ ўлчамли нисбий хатоликлар вектори;
 q – квантил.

Квантил регрессия моделининг параметрларини баҳолашда мусбат ва манфий хатоликларга турли вазнлар беради. Квантил регрессия параметрлари нисбий хатоликлар абсолют қийматлари вазнли йиғиндисини $(Q(\beta_q))$ минималлаштириш натижасида топилиб, қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Q(\beta_q) = \sum_{i:y_i \geq x_i \beta_q} q|y_i - x_i \beta_q| + \sum_{i:y_i < x_i \beta_q} (1 - q)|y_i - x_i \beta_q|.$$

Тенгликдаги номаълум параметрларни топишда математик дастурлашни оптималлаштириш моделининг чизикли дастурлаш туридан фойдаланиш талаб қилинади.

Чизикли дастурлаш масалаларини ҳал қилиш учун аввал чизикли дастурлашнинг мақсад функцияси ва чегаравий шартларини аниқлаб олиш зарур. Квантил регрессиянинг шартли квантил функциясида мусбат ва манфий хатоликларга асимметрик вазн³ берилади:

$$Q(\beta_q) = \sum_{i:y_i \geq x_i \beta_q} q|y_i - x_i \beta_q| + \sum_{i:y_i < x_i \beta_q} (1 - q)|y_i - x_i \beta_q|.$$

Ушбу йиғиндини минималлаштириш орқали номаълум параметрларнинг оптимал баҳоси топилади. Чизикли дастурлашнинг мақсад функциясининг $(Q(\beta_q))$ кўринишини қуйидагича ўзгартириш натижасида ҳосил бўлади⁴:

$$Q(\beta_q) = \sum_{i:y_i \geq x_i \beta_q} q s_i^+ + \sum_{i:y_i < x_i \beta_q} (1 - q) s_i^-.$$

³ Асимметрик вазн – бир-бирига тенг бўлмаган турли хил вазнлар.

⁴ Abdullahi, I. (2015). Analysis of quantile regression as alternative to ordinary least squares regression. Department of Mathematics Ahmadu Bello University.

Тенгликдаги s_i^+ ва s_i^- лар мос равишда мусбат ва манфий хатоликлар бўлиб, улар қуйидаги белгилашлар натижасида ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned} s_i^+ &= y_i - x_i \hat{\beta}_q \\ s_i^- &= -(y_i - x_i \hat{\beta}_q) \\ s_i^+ &\geq 0, s_i^- \geq 0. \end{aligned}$$

Бу ерда, $\hat{\beta}_q$ – модел ёрдамида баҳоланган параметр.

Чизикли дастурлашнинг чегаравий шартларидан келиб чиққан ҳолда қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

$$y_i = x_i \hat{\beta}_q + s_i^+ - s_i^-$$

Ушбу чегаравий шартда мусбат ва манфий хатоликлар бир вақтнинг ўзида нолдан фарқли бўлиши мумкин эмас. Бунда параметрларнинг камида биттаси ёки иккаласи ҳам нолга тенг бўлиш ҳолатлари юзага келиши мумкин.

Барча квантиллер учун чегаравий шартлар ўзгармас бўлиб, фақатгина мақсад функция ўзгарувчан бўлади. $Q(\beta_q)$ функцияни минималлаштириш чизикли дастурлашнинг мақсад функциясини минималлаштириш муаммосига эквивалент ҳисобланади. Шу сабабли, чизикли дастурлаш масаласидаги β_q параметрларнинг оптимал қийматини топиш кифоя.

Симплекс усули орқали номаълум параметрларни оптимал қийматини топишда дастурий алмаштириб бориш жараёнларидан фойдаланади. Маълумотлар қаторининг кенгайиб бориши регрессия параметрларининг аниқлигини оширади. Бунда, чизикли дастурлаш масаласининг мақсад функциясидаги $(Q(\beta_q))$ йиғиндини $Ax = B$ чегаравий шарти остида минималлаштиради.

Симплекс усули

Симплекс усули чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг асосий усулларида бири бўлиб, кетма-кет яқинлашиб бориш орқали $x_1, x_2, \dots, x_n$

Максимал қиймат берувчи чизиқли дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишда ифодаланади:

Масалани ечиш учун симплекс жадвали тузилади. Симплекс жадвалини тузишда аввал берилган масала каноник шаклга келтирилади. Бунда, каноник шаклга келтириш учун барча чегаравий шартлар тенглик кўринишига келтирилади. Тенгсизликларни тенглик кўринишига келтириш учун тенгсизликларга базис ўзгарувчилар қўшилади. Базис ўзгарувчиларни қўшиш натижасида $n - m$ та ўзгарувчининг қиймати нолга айланиб, қолган m та ўзгарувчи тенгламанинг оптимал қийматини топиш орқали ягона қиймати аниқланади. Базис ўзгарувчиларни қўшгандан сўнг тенгсизликлар қуйидаги тенгликлар кўринишига келади:

Бу ерда,
 x_{n+i} – базис ўзгарувчилар.

Базис ўзгарувчиларни бошқа ўзгарувчилардан фарқлаш учун мос равишда $e_1, e_2, \dots, e_t$ деб белгилаш киритилади. Мақсад функцияси тенглигининг ўнг тарафидаги ифода эса, тенгликнинг чап тарафига ўтказилади:

4

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = 0.$$

Ўзгартиришлардан сўнг симплекс жадвалини қуйидаги кўринишда тузиш мумкин:

	x_1	x_2	$\dots$	x_s	$\dots$	x_n	b_i
e_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1s}	$\dots$	a_{1n}	b_1
e_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2s}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_r	a_{r1}	a_{r2}	$\dots$	a_{rs}	$\dots$	a_{rn}	b_r
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{ms}	$\dots$	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_s$	$\dots$	$-c_n$	0

b_i озод ҳадларнинг барчасига мусбат бўлиш шарти берилади. Агар озод хад мусбат бўлмаган ҳолатларда, тенгликнинг ўнг ва чап тарафи -1 га кўпайтирилиб мусбат кўринишга келтирилади.

Берилган масала максималлаштириш муаммоси мавжудлиги туфайли Z қаторидаги барча параметрлар номанфий қийматни қабул қилгунга қадар оптималлаштириш жараёни давом этади.

Дастлаб, мумкин бўлган асосий ечим топилади. Бунда, биринчи базис ўзгарувчилар устунни асосий ечим устунни ҳисобланади ва бу устунда жойлашмаган барча ўзгарувчиларнинг қиймати нолга тенг ҳисобланади. Симплекс жадвалда мумкин бўлган e_i асосий ечимлар аниқланади:

$$e_i = b_i \quad \text{ва} \quad x_j = 0$$

Ушбу мумкин бўлган асосий ечим Z қаторидаги барча коэффициентлар номанфий бўлган тақдирда оптимал ечим ҳисобланади. Агар ушбу коэффициентлардан биронтаси манфий бўлса кейинги симплекс жадвали тузилади. Дастлаб асосий қатор ва асосий устунлар кесишмасидаги асосий элемент топилади. Асосий устунни топиш учун мақсад функцияси қатори манфий параметрлари ичидан абсолют қиймати бўйича энг каттаси танланади ва ўша устун асосий устун ҳисобланади.

Масалан, манфий элементлар ичида абсолют қиймати модел жиҳатдан энг катта элемент c_s бўлса, ушбу s устун асосий устун сифатида қаралади. Асосий устун топилгандан сўнг асосий қатор аниқланади. Бу қаторни топиш учун озод хадлар устуни элементлари мос равишда асосий устун элементларига бўлиб чиқилади ва улардан мусбатларининг энг кичиги танланади:

$$\min \left\{ \frac{b_1}{a_{1s}}; \frac{b_2}{a_{2s}}; \dots; \frac{b_r}{a_{rs}}; \dots; \frac{b_m}{a_{ms}} \right\}.$$

Ушбу нисбатлар ичида мусбатларнинг энг кичиги $\frac{b_r}{a_{rs}}$ бўлса, a_{rs} элемент турган қатор асосий қатор дейилади ва a_{rs} элементнинг ўзи эса асосий элемент ҳисобланади. Асосий элемент топилганидан сўнг янги симплекс жадвали босқичма-босқич тўлдириб борилади.

Иккинчи симплекс жадвалини тузиш бир нечта босқичларда амалга оширилади. Дастлаб, асосий қатор ва асосий устун ўзгарувчилари (x_s ва e_r) ўринлари алмаштирилади. Сўнггра, асосий устун элементлари асосий элементга бўлиниб, янги жадвалга манфий қиймати билан қуйидагича ёзилади:

$$a'_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}} \quad (i \neq r)$$

Асосий қатор элементлари ҳам асосий элементга бўлиниб янги жадвалга ёзилади:

$$a'_{rs} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad (j \neq s)$$

Асосий элемент тескари кўринишга келтирилади:

$$a'_{is} = \frac{1}{a_{rs}}$$

Янги симплекс жадвалининг қолган элементлари эса, қуйидаги формула орқали топилади:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$$

$$(j \neq s), (i \neq r).$$

Бу ерда,

$a_{ij} - a'_{ij}$ элементнинг эски жадвалдаги мос элементи;

$a_{is} - a_{ij}$ элемент турган устун билан a_{rs} асосий устун кесишмасидаги элемент;

$a_{rj} - a_{ij}$ элемент турган устун билан a_{rs} асосий элемент қатори кесишмасидаги элемент;

a_{rs} – асосий элемент.

a_{rs} – асосий элемент.

Асосий ечимнинг симплекс жадвалдаги Z қатор озод хаддан ташқари барча элементлари номанфий бўлса, бу олинган асосий ечим ягона ва у масаланинг оптимал ечими бўлади. Агар Z қатор элементларидан камида биттаси манфий бўлса, оптималлаштириш жараёни юқорида кўрсатилган тартибда оптимал қийматни топгунга қадар давом эттирилади:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \longrightarrow \max.$$

Шунингдек, максималлаштириш муаммосини -1 га кўпайтириб минималлаштириш муаммосига келтириш мумкин:

$$-Z = \sum_{j=1}^n -c_j x_j \longrightarrow \min.$$

Чизиқли дастурлашнинг симплекс усули ёрдамида топилган оптимал параметрлар квантил регрессия номаълум параметрларининг оптимал баҳоси ҳисобланади. Бу параметрлар ёрдамида квантил регрессиянинг баҳоланган қийматлари аниқланади.

Квантил регрессия модели орқали уй-жойларнинг 1 м^2 учун фундаментал нархини аниқлашда қуйидаги квантил регрессия тенгламасининг 50-квантилидан фойдаланилди:

$$y_t = \beta_{1,q}y_{t-1} + \beta_{2,q}x_{1,t} + \beta_{3,q}x_{2,t} + \varepsilon_t .$$

Бу ерда,

y_t – уй-жойларнинг t даврдаги бозор нархи;

y_{t-1} – уй-жойларнинг бозор нархини $t - 1$ даврдаги қиймати;

$x_{1,t}$ – уй хўжаликларига ажратилган кредитларнинг йиллик ўсиш суръати;

$x_{2,t}$ – аҳоли ихтиёридаги ўртача даромад;

$\beta_{1,q}, \beta_{2,q}, \beta_{3,q}$ – номаълум коэффициентлар;

q – квантил қиймати;

ε_t – нисбий хатолик.