

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача

Аннотация

Мазкур методологик асос таҳлил этиладиган кўрсаткичлар қийматидаги тебранишларни камайтирган ҳолда текислашда оддий ҳаракатланувчи ўртачага қараганда жорий ўзгаришларни аниқроқ ифодалайдиган экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача усулини татбиқ этиш юзасидан тайёрланган. Бунда, тасодифий ва қисқа муддатли тебранишларни камайтириш орқали кўрсаткич қийматини текислаш учун фойдаланиладиган экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача усули ёритилган. Хусусан, экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачадаги силлиқлаш доимийсининг оптимал қиймати ҳаракатланувчи ўртачаларнинг ўртача ёшини, шунингдек ҳаракатланувчи ўртачалар ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг математик кутилмаси ва дисперсияларини тенглаштириш усуллари орқали аниқланади.

Таянч сўзлар: дисперсия, математик кутилма, силлиқлаш доимийси, стационар вақт қатори, ўртача, экспоненциал.

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача

Стационар вақт қаторларининг¹ ҳаракатланувчи ўртачасини топишда оддий ва экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачалаш усуллари амалиёда кенг фойдаланилади². Ҳар бир кузатилган вақт қаторлари, ўртачаси доимий ва хатолиги тасодифий тебраниш билан ифодаланиши мумкин бўлган стационар вақт қаторлари ҳисобланади. Хусусан, стационар вақт қаторлари қуйидагича ёзилади:

$$D_t = \mu + \epsilon_t.$$

Бу ерда,

D_t – стационар вақт қатори;

μ – стационар вақт қаторининг ўртача қиймати;

ϵ_t – нормал тақсимотдан олинган ўртачаси нолга ва дисперсияга (σ^2) эга бўлган тасодифий хатolik.

Оддий ҳаракатланувчи ўртача

N тартибли оддий ҳаракатланувчи ўртача энг сўнгги N та стационар вақт қатори кўрсаткичларининг ўртача арифметик қиймати ҳисобланиб, t давр учун қуйидагича топилади:

$$F_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i = \frac{1}{N} (D_t + D_{t-1} + \dots + D_{t-N+1})$$

Бу ерда,

F_t – оддий ҳаракатланувчи ўртача;

D_t – стационар вақт қатори;

N – ҳаракатланувчининг тартиби.

Ҳаракатланувчи ўртачани аниқлашда стационар вақт қаторларининг янги кўрсаткичи қўшилганда охириги N та стационар вақт қатори кўрсаткичларининг ўртача арифметик қийматларини ҳар сафар қайта ҳисоблаш талаб этилади. Бу

¹ Camps, E. C. (2022). Introduction to Time Series and Forecasting.

Стационар вақт қаторлари – турли хил вақт оралиқларида ўртачаси ва стандарт хатolikлари ўзгармайдиган вақт қаторлари.

² Steven, N., & Tava, L. (2015). Production and operation analysis.

кайта ҳисоблашни олдини олиш мақсадида F_{t-1} ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$F_{t-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N}^{t-1} D_i = \frac{1}{N} [D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-N+1} + D_{t-N}]$$

$$\frac{1}{N} [D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-N+1} + D_{t-N} + D_t - D_t] = F_t + \frac{1}{N} [D_{t-N} - D_t]$$

$$F_t = F_{t-1} + \frac{1}{N} [D_t - D_{t-N}].$$

Барча стационар вақт қаторларининг кўрсаткичлари учун бир хил $\frac{1}{N}$ оғирликлар берилганлиги туфайли, ҳаракатланувчи ўртача қиймати ҳақиқий кузатувлар қийматидан сезиларли даражада ортда қолади. Ушбу муаммони бартараф этиш мақсадида экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачадан фойдаланилади.

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача (F_t) стационар вақт қаторининг охириги кўрсаткичларига юқори оғирлик беради ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F_t = \alpha D_t + (1 - \alpha) F_{t-1}.$$

Бу ерда,

F_t – экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачанинг t даврдаги қиймати;

F_{t-1} – экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачанинг $t - 1$ даврдаги қиймати;

D_t – стационар вақт қатори;

α – силлиқлаш доимийси сифатида жорий кузатувга қўйилган нол ва бир оралиғидаги ($0 < \alpha \leq 1$) оғирлик.

Юқоридаги формуладан фойдаланиб F_{t-1} қуйидагича топилади:

$$F_{t-1} = \alpha D_{t-1} + (1 - \alpha) F_{t-2}.$$

Бу ерда,

F_{t-1} – экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачанинг $t - 1$ даврдаги қиймати;

F_{t-2} – экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачанинг $t - 2$ даврдаги қиймати;

$D_{t-1} - t - 1$ даврдаги стационар вақт қатори;

α – силлиқлаш доимийси сифатида жорий кузатувга қўйилган нол ва бир оралиғидаги ($0 < \alpha \leq 1$) оғирлик.

Ўрнига қўйиш ёрдамида қуйидаги тенглик юзага келади:

$$F_t = \alpha D_t + \alpha(1 - \alpha)D_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-2}.$$

Шу тартибда F_t учун чексиз кенгайиш қуйидаги кўринишда ҳосил бўлади:

$$F_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^i D_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{t-i}.$$

a_i ҳар бир кузатилишларга бериладиган оғирлик ҳисобланиб, уларнинг йиғиндиси бирга тенг:

$$\begin{aligned} a_0 &> a_1 > a_2 > \dots > a_i = \alpha(1 - \alpha)^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^i = \alpha(1 - \alpha)^0 + \alpha(1 - \alpha)^1 + \alpha(1 - \alpha)^2 + \dots \\ &= \alpha(1 + (1 - \alpha)^1 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\ &= \alpha * \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача ҳар бир босқичда олдинги даврдаги экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача қийматини талаб қилади. Шу туфайли, дастлабки ҳисоб-китобларда бошланғич даврдаги ўртача арифметик қийматдан фойдаланилади.

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачада барча ўтмишдаги стационар вақт қаторлари кўрсаткичлари учун пасайиб бораётган оғирликлар тўплами қўлланилади.

Агар α нинг қиймати юқорироқ бўлса, жорий кузатувга кўпроқ ва ўтмишдаги кузатувларга эса камроқ оғирлик берилади. Агар α кичик бўлса ўтмишдаги маълумотларга кўпроқ оғирлик бериши натижасида эски маълумотлар таъсири узоқроқ давом этади ва охириги ўзгаришларга таъсирчанлиги камаяди. Шу сабабли, α нинг оптимал қийматини топиш муҳим ҳисобланади.

Силлиқлаш доимийсининг α оптимал қиймати икки усулда аниқланади. Биринчи усулда, ҳаракатланувчи ўртачаларнинг ўртача ёшини (A) ўзаро тенглаштиришдан фойдаланилади. Иккинчи усулда, ҳаракатланувчи ўртачалар ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг ($F_t - D_t$) математик кутилмаси ва стандарт четланиши мос равишда ўзаро тенглаштирилади.

Ўртача ёшини (Average age (A)) ўзаро тенглаштириш

Стационар вақт қаторларининг ўртача ёши (A) ҳар бир маълумотнинг жойлашган ўрни ва оғирликларини ўзаро кўпайтмасининг йиғиндиси сифатида аниқланади. Оддий ҳаракатланувчи ўртачада охириги N та кузатувга $\frac{1}{N}$ тенг оғирликдан берилади ва ўртача ёши (A) қуйидагича топилади:

$$A = \frac{1}{N} (1 + 2 + 3 + \dots + N) = \left(\frac{1}{N}\right) \frac{N * (N + 1)}{2} = \frac{N + 1}{2}.$$

Бу ерда,

A – стационар вақт қаторларининг ўртача ёши;

N – кузатувлар сони.

Экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачада i давридаги маълумотларга қўлланиладиган оғирлик $\alpha(1 - \alpha)^{i-1}$ га тенг. Чексиз тарихий кузатувлар мавжуд вақт қатори учун экспоненциал ҳаракатланувчи ўртачанинг ўртача ёши қуйидагича аниқланади:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha (1 - \alpha)^{i-1} = 1\alpha(1 - \alpha)^0 + 2\alpha(1 - \alpha)^1 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 \dots$$

$$A(1 - \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha (1 - \alpha)^i = 1\alpha(1 - \alpha)^1 + 2\alpha(1 - \alpha)^2 + 3\alpha(1 - \alpha)^3 \dots$$

$$A - A(1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)^0 + \alpha(1 - \alpha)^1 + \alpha(1 - \alpha)^2 \dots$$

$$= \alpha \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = 1$$

$$A = \frac{1}{\alpha}$$

Бу ерда,

A – стационар вақт қаторларининг ўртача ёши;

α – силлиқлаш доимийси сифатида жорий кузатувга қўйилган нол ва бир оралиғидаги ($0 < \alpha \leq 1$) оғирлик.

Ҳаракатланувчи ўртачаларнинг ўртача ёшини тенглаштириш орқали қуйидаги натижага эга бўлинади:

$$\frac{N + 1}{2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2}{N + 1}$$

Бу ерда,

N – ҳаракатланувчининг тартиби;

α – силлиқлаш доимийси сифатида жорий кузатувга қўйилган нол ва бир оралиғидаги ($0 < \alpha \leq 1$) оғирлик.

Математик кутилмаси ва дисперсияларини тенглаштириш

Ушбу жараёнда ҳаракатланувчи ўртачалар ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг ($F_t - D_t$) математик кутилмаси ва стандарт четланиши мос равишда ўзаро тенглаштирилади.

Оддий ҳаракатланувчи ўртача қуйидагича топилади:

$$F_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i.$$

Бу ерда,

F_t – оддий ҳаракатланувчи ўртача;

D_i – стационар вақт қатори;

N – ҳаракатланувчининг тартиби.

Оддий ҳаракатланувчи ўртача ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг ($F_t - D_t$) математик кутилмаси қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$\begin{aligned} E(F_t - D_t) &= E(F_t) - E(D_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t E(D_i) - E(D_t) \\ &= \frac{1}{N} (N\mu) - \mu = 0. \end{aligned}$$

Оддий ҳаракатланувчи ўртача ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг ($F_t - D_t$) дисперсияси қуйидаги кўринишда ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \text{Var}(F_t - D_t) &= \text{Var}(F_t) + \text{Var}(D_t) = \text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i\right) + \text{Var}(D_t) \\ &= \frac{1}{N^2} (N\sigma^2) + \sigma^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + 1\right) = \sigma^2 \left(\frac{N+1}{N}\right). \end{aligned}$$

Аниқланган дисперсиядан фойдаланган ҳолда стандарт четланишнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Шу тартибда экспоненциал ҳаракатланувчи ўртача ва стационар вақт қатори орасидаги фарқ учун математик кутилма ва стандарт четланиш ҳисобланади:

$$\begin{aligned} F_t &= \alpha D_t + \alpha(1-\alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-2} + \dots \\ E(F_t) &= E(\alpha D_t + \alpha(1-\alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-2} + \dots) \\ &= \alpha E(D_t) + \alpha(1-\alpha)^1 E(D_{t-1}) + \alpha(1-\alpha)^2 E(D_{t-2}) + \dots \\ &= \alpha\mu + \alpha(1-\alpha)^1\mu + \alpha(1-\alpha)^2\mu + \dots \end{aligned}$$

$$= \alpha \mu \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = \mu$$

$$E(F_t - D_t) = E(F_t) - E(D_t) = \mu - \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(F_t) &= \text{Var}(\alpha D_t + \alpha(1 - \alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 D_{t-2} + \dots) \\ &= \alpha^2 \sigma^2 + (1 - \alpha)^2 \alpha^2 \sigma^2 + (1 - \alpha)^4 \alpha^2 \sigma^2 + \dots \\ &= \alpha^2 \sigma^2 (1 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^4 + \dots) \\ &= \alpha^2 \sigma^2 \frac{1}{1 - (1 - \alpha)^2} = \frac{\sigma^2 \alpha}{2 - \alpha} \\ \text{Var}(F_t - D_t) &= \text{Var}(F_t) + \text{Var}(D_t) = \frac{\sigma^2 \alpha}{2 - \alpha} + \sigma^2 = \sigma^2 \frac{2}{2 - \alpha} \\ \sigma_e &= \sigma \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}}. \end{aligned}$$

Иккала ҳаракатланувчи ўртача ва стационар вақт қатори орасидаги фарқлар учун ҳам математик кутилма нолга тенг бўлди. Стандарт четланишларни бири-бирига тенглаштириш орқали α нинг оптимал қиймати топилади:

$$\begin{aligned} \sigma \sqrt{\frac{N + 1}{N}} &= \sigma \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} \\ \frac{N + 1}{N} &= \frac{2}{2 - \alpha} \\ \alpha &= \frac{2}{N + 1} \end{aligned}$$

Бу ерда,

N – ҳаракатланувчининг тартиби;

α – силлиқлаш доимийси сифатида жорий кузатувга қўйилган нол ва бир оралиғидаги ($0 < \alpha \leq 1$) оғирлик.

Силлиқлаш доимийсининг оптимал қийматини аниқлашнинг иккала усулида ҳам натижалар бир хил бўлди. Бу эса, иккала ҳаракатланувчи ўртачаларнинг ўртача ёши, ҳаракатланувчи ўртачалар ва стационар вақт қатори орасидаги фарқнинг математик кутилмаси ва стандарт четланиши бир хил эканлигидан далолат беради. Шунингдек, ушбу усуллар стационар вақт

қаторлари учун бўлишига қарамай вақт қаторлари ҳар доим ҳам стационар бўлавермаслиги туфайли, иккала ҳаракатланувчи ўртачаларнинг стандарт четланиши кузатилган вақт қаторларининг стандарт четланишидан юқори шаклланади.