

Eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha

Annotatsiya

Mazkur metodologik asos tahlil etiladigan ko'rsatkichlar qiymatidagi tebranishlarni kamaytirgan holda tekislashda oddiy harakatlanuvchi o'rtachaga qaraganda joriy o'zgarishlarni aniqroq ifodalaydigan eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha usulini tatbiq etish yuzasidan tayyorlangan. Bunda, tasodifiy va qisqa muddatli tebranishlarni kamaytirish orqali ko'rsatkich qiymatini tekislash uchun foydalaniladigan eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha usuli yoritilgan. Xususan, eksponensial harakatlanuvchi o'rtachadagi silliqlash doimiysining optimal qiymati harakatlanuvchi o'rtachalarning o'rtacha yoshini, shuningdek harakatlanuvchi o'rtachalar va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning matematik kutilmasi va dispersiyalarini tenglashtirish usullari orqali aniqlanadi.

Tayanch so'zlar: dispersiya, matematik kutilma, silliqlash doimiysi, statsionar vaqt qatori, o'rtacha, eksponensial.

Ekspontensial harakatlanuvchi o'rtacha

Statsionar vaqt qatorlarining¹ harakatlanuvchi o'rtachasini topishda oddiy va ekspontensial harakatlanuvchi o'rtachalash usullari amaliyoda keng foydalaniladi². Har bir kuzatilgan vaqt qatorlari, o'rtachasi doimiy va xatoligi tasodifiy tebranish bilan ifodalanishi mumkin bo'lgan statsionar vaqt qatorlari hisoblanadi. Xususan, statsionar vaqt qatorlari quyidagicha yoziladi:

$$D_t = \mu + \epsilon_t.$$

Bu yerda,

D_t – statsionar vaqt qatori;

μ – statsionar vaqt qatorining o'rtacha qiymati;

ϵ_t – normal taqsimotdan olingan o'rtachasi nolga va dispersiyaga (σ^2) ega bo'lgan tasodifiy xatolik.

Oddiy harakatlanuvchi o'rtacha

N tartibli oddiy harakatlanuvchi o'rtacha eng so'nggi N ta statsionar vaqt qatori ko'rsatkichlarining o'rtacha arifmetik qiymati hisoblanib, t davr uchun quyidagicha topiladi:

$$F_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i = \frac{1}{N} (D_t + D_{t-1} + \dots + D_{t-N+1})$$

Bu yerda,

F_t – oddiy harakatlanuvchi o'rtacha;

D_t – statsionar vaqt qatori;

N – harakatlanuvchining tartibi.

Harakatlanuvchi o'rtachani aniqlashda statsionar vaqt qatorlarining yangi ko'rsatkichi qo'shilganda oxirgi N ta statsionar vaqt qatori ko'rsatkichlarining o'rtacha arifmetik qiymatlarini har safar qayta hisoblash talab etiladi. Bu qayta hisoblashni oldini olish maqsadida F_{t-1} ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

¹ Camps, E. C. (2022). Introduction to Time Series and Forecasting.

Statsionar vaqt qatorlari – turli xil vaqt oraliqlarida o'rtachasi va standart xatoliklari o'zgarmaydigan vaqt qatorlari.

² Steven, N., & Tava, L. (2015). Production and operation analysis.

$$F_{t-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N}^{t-1} D_i = \frac{1}{N} [D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-N+1} + D_{t-N}]$$

$$\frac{1}{N} [D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-N+1} + D_{t-N} + D_t - D_t] = F_t + \frac{1}{N} [D_{t-N} - D_t]$$

$$F_t = F_{t-1} + \frac{1}{N} [D_t - D_{t-N}].$$

Barcha statsionar vaqt qatorlarining ko'rsatkichlari uchun bir xil $\frac{1}{N}$ og'irliklar berilganligi tufayli, harakatlanuvchi o'rtacha qiymati haqiqiy kuzatuvlar qiymatidan sezilarli darajada ortda qoladi. Ushbu muammoni bartaraf etish maqsadida eksponensial harakatlanuvchi o'rtachadan foydalaniladi.

Eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha

Eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha (F_t) statsionar vaqt qatorining oxirgi ko'rsatkichlariga yuqori og'irlik beradi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F_t = \alpha D_t + (1 - \alpha) F_{t-1}.$$

Bu yerda,

F_t – eksponensial harakatlanuvchi o'rtachaning t davrdagi qiymati;

F_{t-1} – eksponensial harakatlanuvchi o'rtachaning $t - 1$ davrdagi qiymati;

D_t – statsionar vaqt qatori;

α – silliqlash doimiysi sifatida joriy kuzatuvga qo'yilgan nol va bir oralig'idagi ($0 < \alpha \leq 1$) og'irlik.

Yuqoridagi formuladan foydalanib F_{t-1} quyidagicha topiladi:

$$F_{t-1} = \alpha D_{t-1} + (1 - \alpha) F_{t-2}.$$

Bu yerda,

F_{t-1} – eksponensial harakatlanuvchi o'rtachaning $t - 1$ davrdagi qiymati;

F_{t-2} – eksponensial harakatlanuvchi o'rtachaning $t - 2$ davrdagi qiymati;

D_{t-1} – $t - 1$ davrdagi statsionar vaqt qatori;

α – silliqlash doimiysi sifatida joriy kuzatuvga qo'yilgan nol va bir oralig'idagi ($0 < \alpha \leq 1$) og'irlik.

O'rniga qo'yish yordamida quyidagi tenglik yuzaga keladi:

$$F_t = \alpha D_t + \alpha(1 - \alpha)D_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-2}.$$

Shu tartibda F_t uchun cheksiz kengayish quyidagi ko'rinishda hosil bo'ladi:

$$F_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^i D_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{t-i}.$$

a_i har bir kuzatilishlarga beriladigan og'irlik hisoblanib, ularning yig'indisi birga teng:

$$\begin{aligned} a_0 &> a_1 > a_2 > \dots > a_i = \alpha(1 - \alpha)^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^i = \alpha(1 - \alpha)^0 + \alpha(1 - \alpha)^1 + \alpha(1 - \alpha)^2 + \dots \\ &= \alpha(1 + (1 - \alpha)^1 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 + \dots) \\ &= \alpha * \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

Ekspontensial harakatlanuvchi o'rtacha har bir bosqichda oldingi davrdagi ekspontensial harakatlanuvchi o'rtacha qiymatini talab qiladi. Shu tufayli, dastlabki hisob-kitoblarda boshlang'ich davrdagi o'rtacha arifmetik qiymatdan foydalaniladi.

Ekspontensial harakatlanuvchi o'rtachada barcha o'tmishdagi statsionar vaqt qatorlari ko'rsatkichlari uchun pasayib borayotgan og'irliklar to'plami qo'llaniladi.

Agar α ning qiymati yuqoriroq bo'lsa, joriy kuzatuvga ko'proq va o'tmishdagi kuzatuvlarga esa kamroq og'irlik beriladi. Agar α kichik bo'lsa o'tmishdagi ma'lumotlarga ko'proq og'irlik berishi natijasida eski ma'lumotlar ta'siri uzoqroq davom etadi va oxirgi o'zgarishlarga ta'sirchanligi kamayadi. Shu sababli, α ning optimal qiymatini topish muhim hisoblanadi.

Silliqlash doimiysining α optimal qiymati ikki usulda aniqlanadi. Birinchi usulda, harakatlanuvchi o'rtachalarning o'rtacha yoshini (A) o'zaro tenglashtirishdan

foydalaniladi. Ikkinchi usulda, harakatlanuvchi o'rtachalar va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning ($F_t - D_t$) matematik kutilmasi va standart chetlanishi mos ravishda o'zaro tenglashtiriladi.

O'rtacha yoshini (Average age (A)) o'zaro tenglashtirish

Statsionar vaqt qatorlarining o'rtacha yoshi (A) har bir ma'lumotning joylashgan o'rnini va og'irliklarini o'zaro ko'paytmasining yig'indisi sifatida aniqlanadi. Oddiy harakatlanuvchi o'rtachada oxirgi N ta kuzatuvga $\frac{1}{N}$ teng og'irlikdan beriladi va o'rtacha yoshi (A) quyidagicha topiladi:

$$A = \frac{1}{N} (1 + 2 + 3 + \dots + N) = \left(\frac{1}{N}\right) \frac{N * (N + 1)}{2} = \frac{N + 1}{2}.$$

Bu yerda,

A – statsionar vaqt qatorlarining o'rtacha yoshi;

N – kuzatuvlar soni.

Eksponensial harakatlanuvchi o'rtachada i davridagi ma'lumotlarga qo'llaniladigan og'irlik $\alpha(1 - \alpha)^{i-1}$ ga teng. Cheksiz tarixiy kuzatuvlar mavjud vaqt qatori uchun eksponensial harakatlanuvchi o'rtachaning o'rtacha yoshi quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha(1 - \alpha)^{i-1} = 1\alpha(1 - \alpha)^0 + 2\alpha(1 - \alpha)^1 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 \dots$$

$$A(1 - \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha(1 - \alpha)^i = 1\alpha(1 - \alpha)^1 + 2\alpha(1 - \alpha)^2 + 3\alpha(1 - \alpha)^3 \dots$$

$$A - A(1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)^0 + \alpha(1 - \alpha)^1 + \alpha(1 - \alpha)^2 \dots$$

$$= \alpha \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = 1$$

$$A = \frac{1}{\alpha}$$

Bu yerda,

A – statsionar vaqt qatorlarining o'rtacha yoshi;

α – silliqlash doimiysi sifatida joriy kuzatuvga qo'yilgan nol va bir oralig'idagi ($0 < \alpha \leq 1$) og'irlik.

Harakatlanuvchi o'rtachalarning o'rtacha yoshini tenglashtirish orqali quyidagi natijaga ega bo'linadi:

$$\frac{N+1}{2} = \frac{1}{\alpha}$$
$$\alpha = \frac{2}{N+1}$$

Bu yerda,

N – harakatlanuvchining tartibi;

α – silliqlash doimiysi sifatida joriy kuzatuvga qo'yilgan nol va bir oralig'idagi ($0 < \alpha \leq 1$) og'irlik.

Matematik kutilmasi va dispersiyalarini tenglashtirish

Ushbu jarayonda harakatlanuvchi o'rtachalar va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning ($F_t - D_t$) matematik kutilmasi va standart chetlanishi mos ravishda o'zaro tenglashtiriladi.

Oddiy harakatlanuvchi o'rtacha quyidagicha topiladi:

$$F_t = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i.$$

Bu yerda,

F_t – oddiy harakatlanuvchi o'rtacha;

D_i – statsionar vaqt qatori;

N – harakatlanuvchining tartibi.

Oddiy harakatlanuvchi o'rtacha va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning ($F_t - D_t$) matematik kutilmasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$E(F_t - D_t) = E(F_t) - E(D_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t E(D_i) - E(D_t) = \frac{1}{N} (N\mu) - \mu = 0.$$

Oddiy harakatlanuvchi o'rtacha va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning ($F_t - D_t$) dispersiyasi quyidagi ko'rinishda hisoblanadi:

$$\begin{aligned}\text{Var}(F_t - D_t) &= \text{Var}(F_t) + \text{Var}(D_t) = \text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t D_i\right) + \text{Var}(D_t) \\ &= \frac{1}{N^2} (N\sigma^2) + \sigma^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + 1\right) = \sigma^2 \left(\frac{N+1}{N}\right).\end{aligned}$$

Aniqlangan dispersiyadan foydalangan holda standart chetlanishning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Shu tartibda eksponensial harakatlanuvchi o'rtacha va statsionar vaqt qatori orasidagi farq uchun matematik kutilma va standart chetlanish hisoblanadi:

$$\begin{aligned}F_t &= \alpha D_t + \alpha(1-\alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-2} + \dots \\ E(F_t) &= E(\alpha D_t + \alpha(1-\alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-2} + \dots) \\ &= \alpha E(D_t) + \alpha(1-\alpha)^1 E(D_{t-1}) + \alpha(1-\alpha)^2 E(D_{t-2}) + \dots \\ &= \alpha \mu + \alpha(1-\alpha)^1 \mu + \alpha(1-\alpha)^2 \mu + \dots \\ &= \alpha \mu \frac{1}{1 - (1-\alpha)} = \mu \\ E(F_t - D_t) &= E(F_t) - E(D_t) = \mu - \mu = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(F_t) &= \text{Var}(\alpha D_t + \alpha(1-\alpha)^1 D_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 D_{t-2} + \dots) \\ &= \alpha^2 \sigma^2 + (1-\alpha)^2 \alpha^2 \sigma^2 + (1-\alpha)^4 \alpha^2 \sigma^2 + \dots \\ &= \alpha^2 \sigma^2 (1 + (1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^4 + \dots) \\ &= \alpha^2 \sigma^2 \frac{1}{1 - (1-\alpha)^2} = \frac{\sigma^2 \alpha}{2 - \alpha}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(F_t - D_t) = \text{Var}(F_t) + \text{Var}(D_t) = \frac{\sigma^2 \alpha}{2 - \alpha} + \sigma^2 = \sigma^2 \frac{2}{2 - \alpha}$$

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}}.$$

Ikkala harakatlanuvchi o'rtacha va statsionar vaqt qatori orasidagi farqlar uchun ham matematik kutilma nolga teng bo'ldi. Standart chetlanishlarni bir-biriga tenglashtirish orqali α ning optimal qiymati topiladi:

$$\begin{aligned}\sigma \sqrt{\frac{N+1}{N}} &= \sigma \sqrt{\frac{2}{2-\alpha}} \\ \frac{N+1}{N} &= \frac{2}{2-\alpha} \\ \alpha &= \frac{2}{N+1}\end{aligned}$$

Bu yerda,

N – harakatlanuvchining tartibi;

α – silliqlash doimiysi sifatida joriy kuzatuvga qo'yilgan nol va bir oralig'idagi ($0 < \alpha \leq 1$) og'irlik.

Silliqlash doimiysining optimal qiymatini aniqlashning ikkala usulida ham natijalar bir xil bo'ldi. Bu esa, ikkala harakatlanuvchi o'rtachalarning o'rtacha yoshi, harakatlanuvchi o'rtachalar va statsionar vaqt qatori orasidagi farqning matematik kutilmasi va standart chetlanishi bir xil ekanligidan dalolat beradi. Shuningdek, ushbu usullar statsionar vaqt qatorlari uchun bo'lishiga qaramay vaqt qatorlari har doim ham statsionar bo'lavermasligi tufayli, ikkala harakatlanuvchi o'rtachalarning standart chetlanishi kuzatilgan vaqt qatorlarining standart chetlanishidan yuqori shakllanadi.