

Экстремал қийматлар назарияси (Extreme Value Theory)

Аннотация

Мазкур методологик асос мамлакат банк тизимида салбий таъсир қилувчи хатарларнинг экстремал қийматларини миқдорий жиҳатдан аниқлашга ва ушбу хатарларнинг тизим орқали тарқалишини таҳлил қилишга қаратилган ёндашувни жорий этиш юзасидан тайёрланган. Бунда, банклардаги валюта хатарини баҳолашнинг экстремал қийматлар назариясига асосланган ёндашуви ёритилган. Хусусан, ушбу ёндашувда валюта курсининг тарихий ўзгарувчанлигидан келиб чиқиб кейинги даврда юзага келиши мумкин бўлган валюта курсининг экстремал қийматлари аниқланади, шунингдек валюта курси ўзгаришининг банклар балансига таъсири баҳоланади.

Таянч сўзлар: банк, валюта курси, дисперсия, модел, тақсимот, тасодифий, чегара, хатолик, экстремал, GARCH.

Экстремал қийматлар назарияси (Extreme Value Theory)

Экстремал қийматлар назариясига (Extreme Value Theory, EVT) асосланган ёндашув банк тизимида салбий таъсир қилувчи хатарларнинг экстремал қийматларини миқдорий жиҳатдан аниқлашга ва ушбу хатарларнинг тизим орқали тарқалишини таҳлил қилишга қаратилган¹. Хусусан, ушбу ёндашув валюта курсининг тарихий ўзгарувчанлигидан келиб чиқиб, валюта курсининг кейинги даврда юзага келиши мумкин бўлган экстремал қийматларини баҳолаш имконини беради.

EVT асосида баҳоланган валюта курсининг ўзгариши банк балансидаги хорижий валютадаги активлар ва хорижий валютадаги мажбуриятларнинг сўмдаги номинал қийматини ўзгаришига олиб келади. Ушбу ўзгаришлар таъсирида хорижий валютадаги активлар ва мажбуриятлар ўртасидаги номутаносиблик туфайли банкларга салбий таъсир кузатилиши мумкин. Шу билан бирга, валюта курси хатари туфайли ҳосил бўладиган йирик йўқотишлар таъсирида айрим банкларда юзага келган дефолт ҳолатларининг тарқалиш хатарини келтириб чиқариши мумкинлиги ҳам таҳлил қилинади.

Валюта курси ўзгарувчанлиги логарифмик шаклда қуйидагича аниқланади:

$$r_t = \log\left(\frac{FX_t}{FX_{t-1}}\right) = \log(FX_t) - \log(FX_{t-1})$$

Бу ерда,

r_t – t даврдаги валюта курси логарифмик ўзгарувчанлиги;

FX_t – t даврдаги миллий валюта курсининг хорижий валютадаги номинал қиймати;

FX_{t-1} – $(t - 1)$ даврдаги миллий валюта курсининг хорижий валютадаги номинал қиймати.

Асосий эътибор миллий валюта курсининг қадрсизланишига қаратилганлиги сабабли валюта курси ўзгарувчанлиги манфий ишора билан қайта аниқланади ва $y_t = -r_t$ деб белгиланади². Валюта курси манфий

¹ Nikzad, R. (2011). Extreme Value Theory with an Application to Bank Failures through Contagion. University of Ottawa.

² Titov, C. (2022). Forecasting Exchange Rate Value-at-Risk and Expected Shortfall: A GARCH-EVT Approach. School of Economics and Management, Lund University.

Ўзгарувчанлигининг динамикаси қуйидаги кўринишда стохастик жараён³ сифатида моделлаштирилади:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

Бу ерда,

y_t – валюта курсининг манфий ўзгарувчанлиги;

μ_t – шартли ўртача;

σ_t – шартли стандарт оғиш;

$z_t \sim F(0, 1)$ – стандарт Стюдент-т тақсимотига⁴ эга бўлган мустақил ва бир хил тақсимланган тасодифий жараён.

Шартли ўртача ва шартли дисперсия қийматлари $(t - 1)$ вақтгача бўлган маълумотлар тўпламига нисбатан баҳоланади ва ушбу маълумотлар тўплами G_{t-1} орқали белгиланади. Шартли ўртача μ_t ва шартли дисперсия σ_t^2 қийматлари қуйидагича аниқланади:

$$\mu_t = E(y_t | G_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = Var(y_t | G_{t-1})$$

Бу ерда, $E(y_t | G_{t-1})$ ва $Var(y_t | G_{t-1})$ мос равишда шартли ўртача ва шартли дисперсияни билдиради.

EVT ёндашуви учун маълумотлар мустақил ва бир хил тақсимланган бўлиши талаб қилинади. Мустақил ва бир хил тақсимланган қолдиқларга

³ Стохастик жараён – бу вақт давомида тасодифийлик таъсирида ривожланиб борадиган жараён.

⁴ Стандарт Стюдент-т тақсимоти қуйидаги кўринишдаги эҳтимоллик зичлик функциясига эга бўлади:

$$t_v(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

$$v = t - 1$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Бу ерда,

$t_v(x)$ – эҳтимоллик зичлик функцияси;

v – эркинлик даражаси;

t – намуна ҳажми;

$\Gamma(p)$ – Гамма функцияси.

яқинлашиш учун вақт қаторларига авторегрессив ҳаракатланувчи ўртача (Autoregressive Moving Average, ARMA) ва турли умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастиклик (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) моделларидан бири қўлланилади.

Авторегрессив (Autoregressive, AR) модел – бу вақт қаторининг жорий қийматини унинг ўтган даврдаги қийматлари ёрдамида тушунтирувчи статистик модел ҳисобланади. AR моделига кечиккан тасодифий хатоликларни (ε_{t-j}) қўшиш орқали авторегрессив ҳаракатланувчи ўртача (ARMA) модели ҳосил қилинади. Вақт қаторининг ARMA(r,s) тасвири қуйидагича ифодаланади:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^r \varphi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^s \gamma_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Бу ерда,

y_t – маълумотларнинг i даврдаги қиймати;

c – ўзгармас сон;

y_{t-i} – маълумотларнинг i давр олдинги даврдаги қийматлари;

ε_{t-j} – тасодифий хатоликларнинг j давр олдинги даврдаги қийматлари;

φ_i, γ_j – номаълум коэффициентлар.

Кўпгина молиявий вақт қаторларининг тарихий дисперсияси вақт ўтиши билан ўзгариш хусусиятига эга. Яъни, ушбу кўрсаткичларда вақт ўтиши билан ўзгарувчан шартли ҳетероскедастиклик⁵ кузатилади.

Умумлаштирилган авторегрессив шартли ҳетероскедастиклик (GARCH) модели эса, молиявий вақт қаторларининг ўзгарувчан хусусиятларини аниқлаш усули ҳисобланади. GARCH моделида мусбат ва манфий тасодифий хатоликлар дисперсияга симметрик таъсир қилади. Бунда, GARCH(p,q) моделининг шартли дисперсияси қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

⁵ Ҳетероскедастиклик – бу тасодифий ўзгарувчилар кетма-кетлигининг дисперсияси вақт қаторининг турли нуқталарида бир хил бўлмай, ўзгариб турадиган ҳолатдир.

$$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$$

Бу ерда,

$\varepsilon_{t-i} - i$ давр олдинги даврлардаги тасодифий хатоликлар;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ давр олдинги даврлардаги шартли дисперсиялар;

$\omega, \alpha_i, \beta_j$ – коэффициентлар.

Юқоридаги тенгликдаги коэффициентларнинг барчаси номанфий деб қабул қилиниши манфий бўлмаган дисперсияни таъминлаш учун зарур. Шартли дисперсия тенгламасидаги α_i коэффициентлари олдинги даврдаги тасодифий хатоликлар шартли дисперсияга қанчалик таъсир қилишини кўрсатади. Шу билан бирга, β_j коэффициентлари шартли дисперсиянинг барқарорлик даражасини кўрсатади.

GARCH моделларида энг кенг тарқалган ёндашув фақат биринчи тартибли тасодифий хатоликлар ва шартли дисперсия кечикишларидан фойдаланиш ҳисобланади. Стандарт GARCH(1,1) модели қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

Бундан ташқари, интеграцияланган GARCH (Integrated GARCH) модели стандарт GARCH моделига ўхшаш бўлиб, мусбат ва манфий тасодифий хатоликлар дисперсияга симметрик таъсир қилади. GARCH модели билан фарқи шундаки, IGARCH моделида α_i ва β_j коэффициентларининг йиғиндиси бирга тенг:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$$

Бу ерда,

$$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0;$$

$\varepsilon_{t-i} - i$ давр олдинги даврлардаги тасодифий хатоликлар;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ давр олдинги даврлардаги шартли дисперсиялар.

GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan and Runkle GARCH) модели асимметрик GARCH модели бўлиб, манфий тасодифий хатоликлар мусбат тасодифий хатоликларга қараганда шартли дисперсияга кўпроқ таъсир қилади. GJR-GARCH(p,q) моделининг шартли дисперсияси қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, \text{ агар } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, \text{ агар } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

Бу ерда,

$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, \beta_j \geq 0$;

$\varepsilon_{t-i} - i$ давр олдинги даврлардаги тасодифий хатоликлар;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ давр олдинги даврлардаги шартли дисперсиялар.

Экспоненциал GARCH (Exponential GARCH) модели кенг қўлланиладиган асимметрик GARCH моделларидан бири бўлиб, шартли дисперсияни логарифмик кўринишда моделлаштиради. EGARCH(p,q) модели қуйидагича ифодаланади:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i |\varepsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

Бу ерда,

$\varepsilon_{t-j} - i$ давр олдинги даврдаги тасодифий хатоликлар;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ давр олдинги даврлардаги шартли дисперсиялар.

Дастлаб юқорида келтирилган $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ ушбу тенгликдаги ε_t ни ўрнига қўйиш ёрдамида EGARCH(p,q) моделини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i z_{t-i} + \gamma_i |z_{t-i}|) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

Бу ерда, α_i ва β_j ларга ҳеч қандай чекловлар қўйилмайди ва γ мусбатлиги талаб қилинади. Шартли дисперсия логарифмига мусбат тасодифий хатоликнинг

таъсири $(\alpha_i + \gamma_i)$ ва салбий тасодифий хатоликнинг таъсири $(\alpha_i - \gamma_i)$ кўринишда бўлади.

Даражали GARCH (Power GARCH) модели асимметрик GARCH моделларидан бўлиб, шартли дисперсияни δ даражали шаклда моделлаштиради. PGARCH(p,q) моделининг шартли дисперсияси куйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

Бу ерда,

$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, -1 < \gamma_i < 1, \beta_j \geq 0, \delta > 0$;

$\varepsilon_{t-i} - i$ давр олдинги даврлардаги тасодифий хатоликлар;

$\sigma_{t-j} - j$ олдинги даврлардаги шартли стандарт оғишлар.

Юқорида келтирилган барча ARMA-GARCH моделлари комбинацияси максимал эҳтимоллик⁶ функцияси ёрдамида баҳоланади. Максимал эҳтимоллик функцияси шакли GARCH моделларининг параметрик тузилишига боғлиқ.

EVT камдан-кам учрайдиган ҳодисаларни таҳлил қилиш учун асосий воситадир. Кўплаб параметрик ёндашувлар вақт қаторларини моделлаштиришда нормал тақсимотга яқинлашувдан фойдаланади. Бироқ, молиявий маълумотлардаги экстремал қийматларни бундай усул билан моделлаштиришнинг камчилиги шундаки, нормал тақсимот экстремал ҳодисалар эҳтимолини кам баҳолайди. EVTни моделлаштиришда катта йўқотишларнинг кичик намунасига таянган ҳолда фақат тақсимотнинг экстремал қийматларига эътибор берилади. Бу ёндашув, анъанавий моделлаштириш ёндашувларидан фарқли ўлароқ, бутун тақсимотни эмас, фақат экстремал қийматларни моделлаштиришга қаратилган. Шу тариқа EVT ёндашуви маълумотлар қаторининг экстремал қийматларини моделлаштириш орқали юқоридаги муаммоларни бартараф этишга ҳаракат қилади.

Экстремал қийматлар назариясида катта йўқотишлар маълум бир чегарадан ошиб кетувчи кузатувлар сифатида қаралади. Агар, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ кетма-кетлик F тақсимот функциясига эга бўлган мустақил ва бир хил тақсимланган маълумотлар кетма-кетлиги, u танланган

⁶ Максимал эҳтимоллик баҳоси – бу кузатилган маълумотлар асосида тузилган эҳтимоллик функциясини максималлаштириш орқали модел параметрларини баҳолаш усули.

чегара қиймати бўлган ҳолатда, u танланган чегарадан ошган қийматларни билдирса шартли тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$F_u(y) = p(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Бу ерда, $x - u = y$ ва $y > 0$.

Агар чегара етарлича юқори қийматга эга бўлса, шартли тақсимот функцияси $F_u(y)$ умумлашган Парето тақсимотига (Generalized Pareto Distribution, GPD) яқинлашади, яъни $F_u(y) \approx G_{\xi,\eta}(y)$. GPD қуйидаги тарзда аниқланади:

$$G_{\xi,\eta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\eta}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

Бу ерда,

ξ – шакл параметри (shape parameter);

η – масштаб параметри (scale parameter).

Чегара қийматини танлаш масаласи чегарадан ошган қийматлар ёндашувида муҳим аҳамиятга эга. Шу сабабли ушбу тадқиқотда чегара сифатида йўқотишлар тақсимотининг 85-95% даражадаги квантиллари орасидаги қийматлар қараб чиқилади. Ҳар бир танланган чегара учун GPD тақсимоти моделларга алоҳида мослаштирилади ва моделнинг мослиги Anderson-Darling (AD^7) ҳамда Cramer-von Mises (CvM) тестлари ёрдамида баҳоланади. Шунингдек, ҳар бир ҳолатда GPD параметрларининг (ξ ва η) статистик аҳамиятлилиги ҳам таҳлил қилиниб, оптимал чегара танланади.

$F(u)$ ва $G_{\xi,\eta}(y)$ лар бирлаштирилиб, $x > u$ учун умумий тақсимот функция қуйидагича ифодаланади:

⁷ Nemukula, M., & Sigauke, C. (2020). A Point Process Characterisation of Extreme Temperatures: an Application to South African Data. Springer.

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi,\eta}(y) + F(u) \approx 1 - \frac{k}{T} \left(1 + \frac{\xi(x - u)}{\eta} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Бу ерда,

k – чегарадан ошган кузатувлар сони;

T – умумий намуна ҳажми.

GPD параметрлари максимал эҳтимоллик усули ёрдамида баҳоланади. Тақсимот $F(x)$ учун олдиндан белгиланган ишонч даражасидаги максимал йўқотиши (Value at Risk, VaR) қиймати қуйидагича баҳоланади:

$$VaR_q^{EVT} = u + \frac{\eta}{\xi} \left[\left(\frac{T(1 - q)}{k} \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

Бу ерда,

u – чегара қиймати;

η – GPD нинг масштаб параметри (scale parameter);

ξ – GPD нинг шакл параметри (shape parameter);

T – умумий намуна ҳажми;

q – ишонч даражаси;

k – чегарадан ошган кузатувлар сони.

Юқоридаги ифода стандартлаштирилган қолдиқлар (z) учун VaR(95) қийматини баҳолайди. Динамик ўзгарувчанлик модели доирасида манфий ўзгарувчанлик қийматлари қуйидагича ифодаланади:

$$VaR_{q,t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR_q^{EVT}$$

Бу ерда, μ_{t+1} ва σ_{t+1} ARMA-GARCH модели асосида баҳоланган қийматлар. Баҳоланган VaR_q^{EVT} қийматидан ошган йўқотишларнинг ўртача қиймати (Expected Shortfall, ES) қуйидагича баҳоланади:

$$ES_q^{EVT} = \frac{VaR_q^{EVT}}{1 - \xi} + \frac{\eta - \xi u}{1 - \xi}.$$

Динамик ўзгарувчанлик модели доирасида ES қиймати қуйидагича ифодаланади:

$$ES_{q,t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} ES_q^{EVT}.$$

Ушбу якуний формула ёрдамида $t + 1$ давр учун миллий валюта курси манфий логарифмик ўзгарувчанлигининг экстремал қийматлардаги прогнози баҳоланади.

Баҳоланган экстремал қийматлардаги валюта курси ўзгарувчанлиги таъсирида банклар балансида ўзгаришлар юзага келади. Миллий валюта курсининг қадрсизланиши ҳисобига банкларнинг хорижий валютадаги активлари хорижий валютадаги мажбуриятларидан юқори бўлган банкларда узун валюта мавқеи ошади. Аксинча, хорижий валютадаги активлари хорижий валютадаги мажбуриятларидан паст бўлган банклар қисқа валюта позициясида ортиш кузатилади.

Миллий валюта курсининг қадрсизланиши ҳисобига банклар активлари ва мажбуриятлари ўртасидаги миқдори банкнинг капитал қийматидан ошиб кетган тақдирда банк дефолт ҳолатига учраган деб қаралади. Банк дефолт бўлган тақдирда, банклараро боғлиқлик ҳисобига тарқалиш хатари юзага келади. Дефолтга учраган банкнинг ўз олдидаги мажбуриятларини қисман ёки тўлиқ бажара олмаслиги оқибатида, мазкур банкка нисбатан кредитор мавқеида турган банкларнинг активлари қиймати камаяди. Бу эса банклараро тарқалиш хатари туфайли кредитор банкларда кредит йўқотишлари юзага келиши мумкинлигини англатади.

Банклараро тарқалиш хатарини аниқлаш учун банклараро мажбуриятлар матрицасидан фойдаланилади. Агар банк тизимида бир-бирига кредит бериши ёки депозит жойлаштириши мумкин бўлган N та банк бўлса, банклараро мажбуриятлар $(N \times N)$ матрицаси қуйидагича ифодаланади:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & x_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{Ni} & \cdots & x_{Nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Бу ерда,
 $x_{ij} - j$ банкнинг i банк олдидаги мажбуриятларини ифодалайди;
 $\sum_j x_{ij} - i$ банкнинг бошқа банклардан олиниши лозим бўлган умумий маблағларини ифодалайди;

$\sum_i x_{ij} - j$ банкнинг бошқа банклар олдидаги умумий мажбуриятларини ифодалайди.

Ушбу модел маълумотларга қўлланилди ва таҳлил жараёнида икки турдаги танлов амалга оширилди. Биринчи босқичда беш хил GARCH моделларининг ичида параметрларнинг статистик аҳамиятлилиги ҳамда моделларнинг маълумотларга мослиги AIC (Akaike Information Criterion) ва BIC (Bayesian Information Criterion) орқали баҳоланди. Қиёсий таҳлил натижаларига кўра, EGARCH модели маълумотларга энг яхши мослашган модел сифатида танлаб олинди.

Иккинчи босқичда стандартлаштирилган қолдиқлар учун оптимал чегара аниқланди. Энг яхши мосликни таъминловчи чегара сифатида 92 фоизли квантил танлаб олинди. Ушбу чегарадан ошган қийматлар учун GPD тақсимот параметрлари статистик жиҳатдан аҳамиятли эканлиги ҳамда GPD моделини моделлаштиришда тақсимотнинг мослиги AD ва CvM тестлари орқали белгиланди.