

Тизимли шартли хатарлар таҳлили (Systemic Contingent Claims Analysis)

Аннотация

Мазкур методологик асос тизимли аҳамиятга молик банклардаги активларнинг кутилаётган йўқотишлари ва банклар ўртасидаги боғлиқликдан фойдаланган ҳолда банк тизими учун кутилаётган экстремал йўқотишларни аниқлаш усулини ишлаб чиқиш юзасидан тайёрланган. Бунда, тизимли хатарлар кўламини баҳолашга хизмат қиладиган тизимли шартли хатарлар таҳлили модели ёритилган. Тизимли шартли хатарлар таҳлили модели тизимли аҳамиятга молик банклар учун шартли хатарлар таҳлилини амалга ошириш ҳамда банклардаги кутилаётган йўқотишларни бутун банк тизими даражасидаги кўп ўлчовли тақсимотга бирлаштириш босқичларини ўз ичига олади.

Таянч сўзлар: банк капитали, дефолт, кутилаётган йўқотишлар, хатар чегараси, ўзгарувчанлик, экстремал қиймат, эҳтимоллик.

Тизимли шартли хатарлар таҳлили (Systemic Contingent Claims Analysis)

Тизимли шартли хатарлар таҳлили (Systemic Contingent Claims Analysis, Systemic CCA)¹ модели банк активларининг бозор қиймати ва мажбуриятлари орасидаги муносабатни таҳлил қилиш орқали тизимли хатарларни баҳолашда фойдаланилади. Ушбу модел орқали банклардаги активларнинг кутилаётган йўқотишлари ва банклар орасидаги боғлиқликдан фойдаланган ҳолда банк тизими учун кутилаётган экстремал йўқотишлар аниқланади.

Systemic CCA модели икки босқичда амалга оширилади. Биринчи босқичда, банклар муваффақиятсизлигини ифодаловчи омиллар орқали шартли хатарлар таҳлили (Contingent Claims Analysis, CCA)² амалга оширилади. Бунда, таҳлил этилаётган ҳар бир банк учун дефолтгача бўлган масофа (Distance to Default, DtD), дефолт эҳтимоллиги (Probability of Default, PD) ва кутилаётган йўқотишлар (Expected Loss) аниқланади.

Иккинчи босқичда банклар учун ҳисобланган кутилаётган йўқотишлар бутун банк тизими даражасидаги кўп ўлчовли тақсимотга бирлаштирилади. Банкларнинг биргаликдаги кутилаётган йўқотишларини эҳтимоллик ўлчови белгиланади ва банк тизими учун Systemic CCA қиймати аниқланади.

A. Contingent Claims Analysis (CCA)

CCA орқали баланс ва бозор маълумотларидан фойдаланган ҳолда банк активларининг хавф даражасидан пастга тушиш эҳтимоллиги ва ушбу эҳтимолликдаги кутилаётган йўқотишлар аниқланади. Жумладан, CCA ни амалга оширишда банк капиталининг бозор қиймати, унинг ўзгарувчанлиги, рисксиз фоиз ставка ва мажбуриятлар миқдоридан келиб чиқиб аниқланган хатар чегарасидан фойдаланилади. Ушбу кўрсаткичлар орқали дефолтгача бўлган масофа, дефолт эҳтимоллиги ва кутилаётган йўқотишлар ҳисобланади.

Банк капиталининг бозор қиймати оддий ва имтиёзли акцияларнинг капитал бозоридаги қиймати ва сонининг ўзаро кўпайтмаларини йиғиндиси сифатида аниқланади. Банк капитали бозор қийматининг ўзгарувчанлиги сифатида ҳар кунлик ўзгарувчанликнинг 125 кундаги стандарт четланишини

¹ Jobst, A., & Gray, D. (2013). Systemic Contingent Claims Analysis – Estimating Market-Implied Systemic Risk. IMF Working Paper.

² Kyriakopoulos, C., Koulis, A., & Varvounis, G. (2023). Importance of the Contingent Claims Analysis in Detecting Banking Risks: Evidence from the Greek Bank Crisis. Journal of Central Banking Theory and Practice.

йиллик кўринишга³ келтирилган қийматидан фойдаланилади. Рисксиз фоиз ставка сифатида ғазначилик облигациялари фоиз ставкаси инобатга олинади.

ССА моделида хатар чегараси (distress barrier) аниқланади. Ушбу чегарадан банк активларининг пасайиши дефолт эҳтимолининг ортишини англатади. Бунда, хатар чегараси сифатида қисқа муддатли мажбуриятлар ва узоқ муддатли мажбуриятларнинг ярмидан фойдаланилади:

$$B = D_S + 0,5 * D_L$$

Бу ерда,

B – хатар чегараси;

D_S – қисқа муддатли мажбуриятлар;

D_L – узоқ муддатли мажбуриятлар.

Банк мажбуриятларининг бозор қиймати хатарсиз мажбуриятларнинг жорий қиймати ва кутилаётган йўқотишлар қийматлари орасидаги фарк орқали аниқланади:

$$D_t = B_t e^{-(T-t)} - P_t$$

Бу ерда,

D_t – t даврдаги мажбуриятнинг бозор қиймати;

B_t – хатар чегараси;

T – мажбуриятларнинг тўлов муддати;

P_t – t даврдаги кутилаётган йўқотишлар қиймати.

³ Бир йилда ўртача 250 та савдо кунининг бўлишини инобатга олган ҳолда, банк капитали бозор қийматининг ўзгарувчанлигини йиллик кўринишга келтиришда ҳар кунлик ўзгарувчанликнинг 125 кундаги стандарт четланиши $\sqrt{250}$ сонига кўпайтирилган

1-чизма. CCA алгоритми

Маълумотларни киритиш

$$E, \sigma_E, B, r, T$$

Активларнинг бозор қиймати ва ўзгарувчанлигини баҳолаш

$$A, \sigma_A$$

Дефолтгача бўлган масофани аниқлаш

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

Дефолт эҳтимоллигини баҳолаш

$$PD = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Кутилаётган йўқотишларни аниқлаш

$$P = B_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) - A(1 - N(d_1))$$

Манба: Марказий банк.

Активлар одатда стохастик жараёнга⁴ амал қилади ва уларнинг дифференциал кўринишдаги тенгламаси қуйидагича ҳосил қилинади:

$$\frac{dA}{A} = \mu_A dt + \sigma_A dZ(t)$$

Бу ерда,

$\frac{dA}{A}$ – актив қийматининг нисбий ўзгариши;

μ_A – активларнинг қисқа муддатдаги ўзгариши (instantaneous drift);

σ_A – активларнинг ўзгарувчанлиги (volatility of assets);

$Z(t)$ – Wiener жараёни (Wiener-process)⁵.

Ушбу келтирилган узлуксиз тасодифий миқдорнинг⁶ дифференциал кўринишдаги тенгламаси геометрик Броун ҳаракати (Brownian motion)⁷ деб аталади.

Геометрик Броун ҳаракати тенгламани ечиш ёрдамида активларнинг t даврдаги узлуксиз тасодифий миқдори қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$A_t = A_0 e^{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A Z(t)}$$

Бу ерда,

A_t – t вақтида активларнинг бозор қиймати;

A_0 – активларнинг бошланғич қиймати;

μ_A – активларнинг қисқа муддатдаги ўзгариши;

σ_A – активларнинг ўзгарувчанлиги;

⁴ Стохастик жараён — бу вақт давомида тасодифийлик таъсирида ривожланиб борадиган жараён.

⁵ Szabados, T. (1994). An Elementary Introduction to the Wiener Process and Stochastic Integrals. Technical University of Budapest.

Wiener жараёни – активлар нархининг тасодифий компонентини ифодалайди ва активлар нархидаги қўлланмаган беқарор ўзгаришларни моделлаштиришда қўлланилади.

⁶ Узлуксиз тасодифий миқдор – бу чекли ёки чексиз сонли ораликдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдор бўлиб, унинг эҳтимоллик зичлик функцияси ушбу кўринишда бўлади:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Бу ерда,

a – эҳтимоллик зичлик функциясининг қуйи чегараси;

b – эҳтимоллик зичлик функциясининг юқори чегараси.

⁷ Shreve, S. (2004). Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer Finance.

Геометрик Броун ҳаракати – молиявий активларнинг вақт бўйича эволюциясини тасвирлайдиган модел.

$Z(t)$ – Wiener жараёни.

Банк активларининг t вақтидаги қиймати хатар чегарасидан паст шаклланиши заифликлардан далолат беради. Ушбу ҳодисанинг назарий жиҳатдан аниқланган дефолт эҳтимоллиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$P(A_t \leq B_t) = N \left(- \frac{\ln \left(\frac{A_0}{B_t} \right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma_A \sqrt{T - t}} = -d_{2,\mu} \right).$$

Бу ерда,

$P(A_t \leq B_t)$ – дефолтга учраш эҳтимоллиги;

$N(-d_{2,\mu})$ – стандарт нормал тақсимот функцияси;

$d_{2,\mu}$ – дефолтгача бўлган масофа.

Капитал ва мажбурият йиғиндисининг активлар қийматига тенглигидан фойдаланиб мажбуриятларнинг бозор қиймати қуйидагича аниқланади:

$$D_t = A_t - E_t.$$

Бу ерда,

D_t – мажбуриятларнинг бозор қиймати;

E_t – капиталнинг бозор қиймати;

A_t – активларнинг бозор қиймати.

Мажбуриятларнинг бозор қийматини аниқлашда активларнинг бозор қиймати ва уларнинг ўзгарувчанлигидан фойдаланилади:

$$\begin{aligned} E &= AN(d_1) - Be^{-rT}N(d_2). \\ D &= A - AN(d_1) + Be^{-rT}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln \left(\frac{A}{B} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \end{aligned}$$

Активлар бозор қиймати ва ўзгарувчанлиги капиталнинг бозор қиймати ҳамда ўзгарувчанлиги орқали Ito леммаси (Ito's lemma)⁸ ёрдамида аниқланади. Ito леммаси доимий ўзгариб турувчи ва кутилмаган жараёнларда функциянинг ўзгаришини ҳисоблашга ёрдам беради. Бунда, оддий дифференциалга иккинчи тартибли ҳаднинг қўшилиши орқали қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial A} \mu_A + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} \sigma_A^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial A} \sigma_A dZ$$

$$E \sigma_E = A \sigma_A \frac{\partial E}{\partial A} = A \sigma_A N(d_1).$$

$$E = AN(d_1) - Be^{-rT} N(d_2)$$

$$E \sigma_E = A \sigma_A N(d_1)$$

Бу орқали активларнинг бозор қиймати ва ўзгарувчанлигини аниқлаш мумкин. Бунда, номаълум параметрлар Бройден усули (Broyden method)⁹ ёрдамида аниқланади.

Аниқлангандан активларнинг бозор қиймати ва ўзгарувчанлиги орқали дефолтгача бўлган масофа, дефолт эҳтимоллиги ва кутилаётган йўқотишлар аниқланади. Хусусан, дефолтгача бўлган масофа ҳамда дефолт эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$DtD = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}} = d_2$$

$$PD = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Дефолтгача бўлган масофа активлар қиймати ва хавф чегараси ўртасидаги стандарт оғишлар сонини ифодалайди. Баҳоланган активлар хатар чегарасидан пастда бўлган ҳолатларда дефолтгача бўлган масофанинг ортиши дефолт эҳтимолини камайтиради, аксинча стандарт оғишлар сонининг камайиши эса дефолт эҳтимолини оширади.

Дефолтгача бўлган масофа ва дефолт эҳтимоллигидан келиб чиқиб, кутилаётган йўқотишлар аниқланади:

⁸ Washburn, B., & Dik, M. (2021). Derivation of Black-Scholes equation using Ito's lemma. Proceedings of International Mathematical Sciences.

⁹ Dennis, J., & Schnabel, R. (1996). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.

Бройден усули – нозикли мураккаб кўринишдаги тенгламалар системасини ечиш учун қўлланиладиган рақамли такрорлаш алгоритмидир.

$$P = B_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) - A(1 - N(d_1))$$

$$d_1 = d_2 + \sigma_A \sqrt{T}.$$

Бу ерда,

P – кутилаётган йўқотишлар;

B – хатар чегараси;

r – рисксиз фоиз ставка;

T – мажбуриятларнинг тўлов муддати;

d_2 – дефолтгача бўлган масофа;

A – активларнинг бозор қиймати;

σ_A – активларнинг ўзгарувчанлиги.

Кейинги босқичда банклар қирқимида ҳисобланган кутилаётган йўқотишлар бутун тизим даражасидаги кўп ўлчовли тақсимотга жамланади.

B. Systemic Contingent Claims Analysis (Systemic CCA)

Банк тизими бўйича дефолт хавфини аниқлаш учун банкларнинг кутилаётган йўқотишлари бирлаштирилади. Банк тизими бўйича кутилаётган йўқотишларни аниқлашда банкларда кутилаётган йўқотишларнинг маржинал тақсимои, боғлиқлик тузилиши ва биргаликдаги тақсимланиши баҳоланади.

Ҳар бир банк бўйича кутилаётган йўқотишларнинг маржинал тақсимотини баҳолаш ССА модели ёрдамида аниқланган кутилаётган йўқотишлар асосида экстремал қиймат назариясига (Extreme Value Theory, EVT)¹⁰ мувофиқ амалга оширилади.

¹⁰ Kotz, S., & Nadarajah, S. (1999). Extreme Value Distributions: Theory and Applications. Imperial College Press.

2-чизма. Тизимли шартли хатарлар таҳлили алгоритми

Аниқланган кутилаётган
йўқотишларни киритиш

$$P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)$$

Индивидуал маржинал
тақсимот параметрларини
баҳолаш

$$\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j, \hat{\xi}_j$$

Боғлиқлилик тузилишини
аниқлаш

$$\gamma(\omega) = \min \left\{ 1, \max \left\{ n \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_{j=1}^m \frac{y_{i,j}}{\omega_j \hat{y}_{.j}} \right)^{-1}, \omega, 1 - \omega \right\} \right\}$$

Биргаликдаги тақсимотини
аниқлаш

$$G_{t,m}(x) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) \gamma_t(\omega) \right\}$$

Бирлаштирилган $VaR(a)$
қийматини баҳолаш

$$VaR(a) = \inf \{ x: F(x) \geq a \}$$

Кутилаётган экстремал
қийматларни аниқлаш

$$ES(a) = \frac{1}{1-a} \int_a^1 VaR(b) db$$

Тасодифий қийматлари мустақил ва бир хил тақсимланган кутилаётган йўқотишларнинг вектор қийматлари қатори қуйидагича кўринишда бўлади:

$$X_j^n = P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)$$

Бу ерда,

j – банклар;

$P_{E,m}^n(t)$ – t даврда кутилаётган йўқотишлар.

Индивидуал асимптотик юқори даражали (asymptotic tail) ҳаракати Fisher-Tippett-Gnedenko¹¹ теоремасига мувофиқ моделлаштирилган бўлиб, нормаллаштирилган максимал (ёки минимал) тақсимотнинг экстремал бўлиши аниқланади:

$$X = \max(P_{E,j}^n(t), \dots, P_{E,m}^n(t)).$$

Нормаллаштирувчи $\beta_j^n > 0$ ва α_j^n ўзгармас коэффициентлар ёрдамида n та кузатувдан олинган максимал қийматларни нормаллаштирилган кўринишда ифодаланганда ушбу қийматлар умумий экстремал қийматлар (Generalized Extreme Value, GEV) тақсимотига яқинлашади ($x \in R$):

$$F_n^{[\beta^n x + \alpha^n]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{X - \alpha^n}{\beta^n} \leq y\right) = [F(\beta^n y + \alpha^n)]^n \rightarrow H(x).$$

Умумий экстремал қийматлар тақсимоти экстремал ҳаракатларнинг учта алоҳида туридан Gumbel (EV_0), Frechet (EV_1) ва салбий Weibull (EV_2) бирига мос келади ва қуйидагича кўринишда бўлади:

$$EV_0: H_0(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad \text{агар } x \geq 0, \quad \xi = 0$$

$$EV_1: H_{1,\xi}(x) = \exp\left(-x^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \text{агар } x \in \left[\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty\right), \quad \xi > 0$$

$$EV_2: H_2(x) = \exp\left(-(-x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \text{агар } x \in \left(-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi}\right], \quad \xi < 0.$$

¹¹ Peon, P. (2020). Statistical Extreme Value Theory. Application to basins of the Basque Country. Master Universitario en Matemáticas y Computación.

Чегаравий тақсимотлар бирлаштирилиб қуйидаги функция ҳосил қилинади:

$$b_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{\left(-\frac{1}{\xi}\right)-1} \exp \left(- \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right)_+$$

Эҳтимоллик зичлик функциянинг тақсимот функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} \exp \left(- \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right), & \text{агар } 1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \geq 0 \\ \exp(-\exp \left(- \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)), & \text{агар } x \in R, \xi = 0 \end{cases}$$

Ҳар бир кутилаётган йўқотиш қаторининг умумий экстремал қийматлар тақсимотига чегарада яқинлашувчи индивидуал маржинал зичлик функцияси қуйидагича аниқланади:

$$y_i(x) = \left(1 + \hat{\xi}_j \frac{(x - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_j} \right)^{-\frac{1}{\xi}}_+ \quad (j = 1, \dots, m).$$

$$1 + \hat{\xi}_j \frac{(x - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_j} > 0$$

$$\sigma_j > 0$$

$$\xi_j \neq 0$$

Бир ўзгарувчилик зичлик функциясининг ўртача (Mean), четланиш (Variance), эгрилик (Skewness) ва кескинлик (Kurtosis) кўрсаткичлари аниқланади:

$$\text{Ўртача: } \begin{cases} \mu + \frac{\sigma(\Gamma(1-\xi)-1)}{\xi}, \text{ агар } \xi \neq 0, \xi < 1 \\ \mu + \sigma\gamma, \text{ агар } \xi = 0 \\ \infty, \text{ агар } \xi \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Четланиш: } \begin{cases} \frac{\sigma^2(b_1-b_1^2)}{\xi^2}, \text{ агар } \xi \neq 0, \xi < \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma^2\pi^2}{6}, \text{ агар } \xi = 0 \\ \infty, \text{ агар } \xi \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Эгрилик: } \begin{cases} \frac{b_3-3b_1b_2+2b_1^3}{(b_2-b_1^2)^2}, \text{ агар } \xi \neq 0 \\ \frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3}, \text{ агар } \xi = 0 \end{cases}$$

$$\text{Кескинлик: } \begin{cases} \frac{b_4-4b_1b_3+6b_2b_1^2-2b_1^4}{(b_2-b_1^2)^2}, \text{ агар } \xi \neq 0 \\ \frac{12}{5}, \text{ агар } \xi = 0 \end{cases}$$

Бу ерда,

$b_p = \Gamma(1 - p\xi)$, $p \in \{1, \dots, 4\}$;

γ – Эйлер доимийси (Euler constant) ($\approx 0,577$)¹²;

$\zeta(t)$ – Риман-зета функцияси (Riemann zeta function)¹³;

$\Gamma(t)$ – гамма эҳтимоллик зичлик функцияси¹⁴.

Ушбу кўрсаткичлар максимал эҳтимоллик орқали рақамли такрорлаш¹⁵ ёрдамида бир вақтда баҳоланади. Хусусан, умумий экстремал қийматлар тақсимотидаги максимал эҳтимоллик баҳоловчиси бир вақтнинг ўзида учта μ, σ ва ξ параметрлар бўйича $\prod_{i=1}^n b_{\mu, \sigma, \xi}(x|\theta)$ эҳтимолини максималлаштириш учун такрорлаш ёндашуви орқали баҳоланади. Такрорлаш ёндашувида баҳолашни бошланғич қиймати сифатида ораликлар нисбатларининг чизиқли комбинацияларидан¹⁶ (linear combinations of ratios of spacings) фойдаланилади.

¹² Kaczowski, S. (2021). On a generalization of Euler's constant. Surveys in Mathematics and its Applications.

¹³ Waldschmidt, M. (2017). An introduction to the Riemann zeta function. CIMPA-ICTP Research School.

Риман-зета функциясининг кўриниши қуйидагича бўлади: $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$.

¹⁴ Capinski, M., & Kopp, E. (1998). Measure, Integral and Probability. Springer-Verlag.

Гамма функцияси ушбу кўринишда бўлади: $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$.

¹⁵ Рақамли такрорлаш – модел параметрларини кетма-кет ҳисоблаш ва янгилаш орқали оптимал қийматларга яқинлашиш усули.

¹⁶ Ораликлар нисбатларининг чизиқли комбинациясида тартибланган кузатувлар орасидаги фарқ олинади. Юқори ва паст қийматлар атрофидаги ораликларни солиштириб логарифмик нисбатлар йиғилади.

Банклар бўйича кутилаётган йўқотишларнинг боғлиқлик тузилиши баҳоланади. Хусусан, кутилаётган йўқотишларининг маргинал тақсимотлари ўртасида параметрик бўлмаган, кўп ўлчовли боғлиқлик функцияси қуйидагича аниқланади:

$$Y(\omega) = \min \left\{ 1, \max \left\{ n \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_{j=1}^m \frac{y_{i,j}}{\omega_j \widehat{y}_{\cdot,j}} \right)^{-1}, \omega, 1 - \omega \right\} \right\}$$

$$\widehat{y}_{\cdot,j} = \sum_{i=1}^n \frac{y_{i,j}}{n}$$

$$0 \leq \max(\omega_1, \dots, \omega_{m-1}) \leq Y(\omega_j) \leq 1.$$

Бу ерда,

$Y(\cdot)$ – каварик функция ($Y(0) = Y(1) = 1$);

$\widehat{y}_{\cdot,j}$ – барча кутилаётган йўқотишлар қийматларининг ($i \in n$) ўртача маргинал зичлигини акс эттиради;

Λ – барча банклар бўйича экстремал зичликларнинг энг кичик нисбати.

Банклар бўйича кутилаётган йўқотишларнинг маржинал тақсимотларини бирлаштирилиб, кўп ўзгарувчили экстремал қиймат тақсимои аниқланади:

$$G_{t,m}(x) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right\}.$$

Кўп ўзгарувчили экстремал қиймат тақсимоининг эҳтимоллик зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$g_{t,m}(x) = \hat{\sigma}_{t,m}^{-1} \left(\left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right)^{\hat{\xi}_{t,m}+1} \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^m y_{t,j} \right) Y_t(\omega) \right\}.$$

Қуйидаги эҳтимоллик функциясини максимал қилиш орқали номаълум параметрлар баҳоланади:

$$\prod_{j=1}^m g_{t,m}(x|\theta)$$

Эҳтимоллик зичлик функциялар кўпайтмасини логарифмланган қиймати орқали логарифмик эҳтимоллик функцияси аниқланади. Бунда, логарифмик эҳтимоллик функциясини максималлаштирувчи θ_0 қиймати баҳоланади:

$$\sum_{j=1}^m \ln g(x|\theta)$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \hat{l}(\theta|x) \rightarrow \theta_0$$

Номаълум параметрлар логарифмик эҳтимоллик функциясининг максимал қийматида аниқланади.

Шартли зарар кутилмаси (conditional tail expectation) сифатида кутилаётган экстремал йўқотиш инобатга олинади. Хусусан, экстремал йўқотиш активлардаги йўқотишларнинг $VaR_{\alpha=0,95}$ даражасидан ошадиган молиявий зарарларни кутилган қийматини ифодалайди:

$$ES_a = E[X|X > VaR_a] = \frac{1}{1 - F(VaR_a)} \int_{VaR_a}^{\infty} (1 - F(x)) dx = \frac{1}{1 - a} \int_a^1 VaR_a da$$

$$VaR_a = \inf\{x: F(x) \geq a\}$$

Хавф остидаги қийматнинг F тақсимот функциясига тегишли квантилдаги ($0 < a < 1$) кўп ўзгарувчили экстремал йўқотишлар қуйидагича ҳисобланади:

$$ES_{t,\tau,m,a} = -E[z_t | z_t \geq G_{t,\tau,m}^{-1}(a) = VaR_{t,a}]$$

$$= -\frac{1}{a} \int_0^a G_{t,\tau,m}^{-1}(x) dx$$

$$G^{-1}(a) = \inf(x | G(x) \geq a)$$

Бу ерда,

ES – экстремал йўқотишлар;

$G^{-1}(a)$ – эҳтимолликка мос келадиган квантил;

z_t – биргаликдаги йўқотишлар.

Экстремал йўқотишлар бўйича VaR қиймати қуйидагича аниқланади:

$$VaR_{t,a} = \sup\{G_{t,\tau,m}^{-1}(a) | \Pr [z_t > G_{t,\tau,m}^{-1}(a)] \geq a = 0.95\}.$$

Хусусан, биргаликда йўқотишларининг маълум бир даврдаги баҳоси аниқланади:

$$G_{t,\tau,m}^{-1}(a) = \hat{\mu}_{t,m} + \frac{\hat{\sigma}_{t,m}}{\hat{\xi}_{t,m}} \left(\left(-\frac{\ln(a)}{Y_t(\omega)} \right)^{-\hat{\xi}_{t,m}} - 1 \right).$$

Экстремал йўқотишлар тасодифий ўзгарувчилар фазосида аниқланган ҳақиқий функционал изчил хавф ўлчовини (coherent risk measures)¹⁷ ифодалайди қуйидаги аксиомалар ўринли ҳисобланади:

- 1) барча X ва Y лар учун, $v(X + Y) \leq v(X) + v(Y)$;
- 2) агар $X \leq Y$ бўлса, $v(X) \leq v(Y)$;
- 3) λ мусбат ўзгармас сон учун $v(\lambda X) = \lambda v(X)$ ўринли;
- 4) c ўзгармас сон учун $v(X + c) = v(X) + c$ ўринли.

Тизимли шартли хатарлар таҳлили моделининг якуний натижаси сифатида кўп ўзгарувчили экстремал йўқотишлар қиймати инобатга олинади. Банк тизими учун тизимли шартли хатарлар таҳлилини амалга оширишда банкларнинг тизимли аҳамиятга молик эканлиги, фонд биржасидан рўйхатдан ўтганлиги ва вақт қаторлари бўйича зарурий маълумотларнинг мавжудлиги эътиборга олинади.

¹⁷ Lam, T., Verma, A., Low, B., & Jaillet, P. (2023). Risk-Aware Reinforcement Learning with Coherent Risk Measures and Non-linear Function Approximation.