

**Давлат қимматли қоғозлари даромадлилик
эгри чизиғини ҳисоблашнинг назарий
МЕТОДОЛОГИЯСИ**

Давлат қимматли қоғозлари даромадлилик эгри чизиғини шакллантириш учун қуйидаги назария ва формулалардан фойдаланилади:

Маълум бир t кун учун давлат қимматли қоғозлари даромадлилик эгри чизиғини шакллантиришда Нелсон-Сигел параметрик моделидан фойдаланилади. Ушбу модел $\beta_{0,t}$, $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ ўзгарувчи параметрлар ҳамда λ ўзгармас параметрдан ташкил топган. Маълум бир t кун ҳамда τ даврли қимматли қоғоз учун купонсиз давомий мураккаб фоиз ставкасидаги даромадлилик эгри чизиғи қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$y_{t,\tau} = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (1)$$

Ушбу формулада модел параметрлари ҳамда маълум бир инструмент бўйича пул оқимлари ҳисобланиши кунлик амалга оширилади. Бунда бир йилдаги кунлар сони Actual/365L стандарди бўйича амалга оширилади (яъни йиллар 365 ёки 366 кундан иборат бўлади).

Бироқ маълумотлар етарли бўлмаган шароитда ушбу параметрларни баҳолаш статистик нобарқарор натижаларга олиб келиши мумкин. Шунинг учун баҳолаш жараёнида β_{i,t_1} ва β_{i,t_2} ўзаро боғлиқ, деб фараз қилинади, яъни улар даврдан даврга ўтганда унчалик ўзгармайди. t давр давомида $\beta_{i,t}$ нинг қандай ўзгариши кейин келувчи стохастик модел ёрдамида аниқланади.

Шу билан бирга, вақт давомида ўзгарувчан учта β параметрли 120 кунлик ҳисоблаш интервалидан иборат бўлган моделни баҳолаш жуда кўп параметрлар тўпламини баҳолашни тақозо этиб, бундай баҳолаш жараёни узоқ вақтни талаб этса-да, бизга бугунги эгри чизиқ қийматини аниқлаш учун фақат охириги даврдаги параметрлар қиймати керак бўлади (матн давомида бу t^{max} орқали белгиланган). Кейинги ҳафта учун янги 120 кунлик ҳисоблаш интервалидан фойдаланилади.

Давлат қимматли қоғозлари даромадлилик эгри чизиғини кунлик интервалда ҳисоблаш оптималлаштириш нуқтаи назардан самарасиз эканлигини инобатга олиб, $s_1, s_2, \dots, s_N$ кунлар тўплами белгиланади ва улар 120 кунлик ҳисоблаш интервалини қоплаш учун тенг тақсимланади.

Мазкур методологияда $s_1 \leq t^{\min}$ ва $s_N \geq t^{\max}$ этиб белгиланади ва базавий ҳисоблашда 28-кунлик интервалдан фойдаланиб, ҳар бир $s_k - s_{k-1}$ интервални барча k лар учун 28 кунга тенг бўлади. Натижада Нелсон-Сигел параметрик модели бўйича 120 та параметрлар тўпамидан фарқли равишда $N = 6$ параметрлар тўплами ҳисобланади. Бунда, s_N сўнгги интервалнинг қарийб ўртасидан жой олади ва маълумотлар базасидаги барча мавжуд

операцияларнинг охирги ҳисоб-китоб санасини (одатда $T + 0$, $T + 1$ ва $T + 2$) ўз ичига олади.

Эгри чизик қийматларини ҳисоблаётганда s_N шундай танланадики, у маълумотлар тўпламида мавжуд энг охирги ҳисоб-китоб кунига мос келиб (одатда, бугунга бир ёки икки кун қўшилади), охирги кесманинг ўртасига жойлаштирилади. Шу тарзда қолган $s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$ кунлар бутун ҳисоблаш даврни қоплайдиган қилиб танланади.

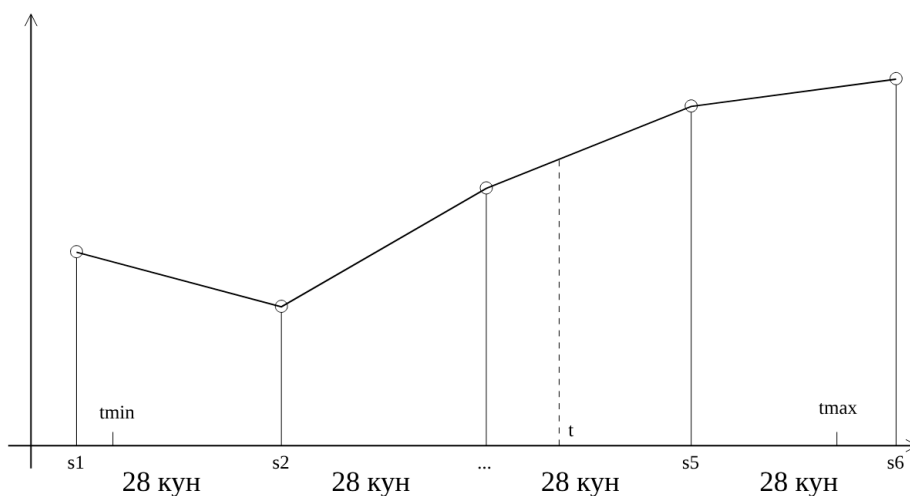
Танланган даврдаги барча β_{i,s_k} параметрлар тасодифий авторегрессив жараён ёрдамида моделлаштирилади:

$$\beta_{i,s_k} = \beta_{i,s_{k-1}} + \varepsilon_{i,k}, \quad \text{бунда } i = 0, \dots, 2, k = 2, \dots, N, \quad (2)$$

бу ерда $\varepsilon_{i,k} \sim N(0, \sigma(\beta_i)^2)$ бўлиб, $\sigma(\beta_i)$ – шокларнинг давр давомида ўзгармайдиган стандарт хатоликлари.

Ҳолат чизмаси 1-расмда келтирилган. Расман $\beta_{i,t}$ қуйидагича аниқланади:

$$\beta_{i,t} = \begin{cases} \beta_{i,s_k} & \text{агар } s_k = t \text{ бўлса} \\ \frac{s_k - t}{s_k - s_{k-1}} \beta_{i,s_{k-1}} + \frac{t - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \beta_{i,s_k} & \text{агар } s_{k-1} < t < s_k \text{ бўлса} \end{cases} \quad (3)$$



1-расм. Беталар интерполацияси

(1) тенгликдаги давомий мураккаб фоиз ставкасини ўтган даврларда кузатилган нархларга боғлашнинг иккита йўли мавжуд. Биз танлаган ёндашувда $y_{t,\tau}$ нинг нол қийматлари инструмент пул оқимларининг дисконтланган суммаси орқали кузатилган операцияга боғланади. Даромадлилик эгри чизигини баҳолашнинг амалий моделларида муқобил ёндашув сифатида $y_{t,\tau}$ нол даражалари олдинги амалиётлардаги жами даромадлилик квоталарига бевосита боғлаб қўйилади (тегишли маълумот тўғриланишларидан кейин). Бироқ бу қатъий даромадли инструментлар баландроқ купон ставкаларига эга бўлган бозорларни ифодаловчи моделда ички нобарқарорликларга сабаб бўлади.

Бирор i қимматли қоғознинг¹ t даврдаги ялпи нархи $P_{i,t}$ бўлсин. Нарх пул оқимлари ва номаълум дисконт ставкаси орқали ҳисобланиши мумкин:

$$P_{i,t} = \sum_j c_{i,j} d_{t,\tau_j}, \quad (4)$$

бунда j — i қимматли қоғознинг кележақдаги барча пул оқимлари индекси, $c_{i,j}$ — j -чи пул оқими, d_{t,τ_j} — пул оқимлари содир бўлувчи t ва $t + \tau_j$ даврлар орасидаги дисконт ставкаси. Дисконт ставкалари йиллик фоизларда $y_{t,\tau}$ узлуксиз ҳисобланувчи мураккаб фоиз ставкасида ифодаланучи даромадлилик эгри чизиги орқали аниқланади:

$$y_{t,\tau} = -\frac{100 \cdot M}{\tau} \log(d_{t,\tau}), \quad (5)$$

бунда M бир йилдаги кунлар сонини билдириб, 365 сифатида ўрнатилган модел параметри.

Назарий ялпи нарх $P_{i,t}$ ни ҳисоблаш йўли маълум бўлди. Бироқ амалда ялпи нарх бирор хатолик билан қайд этилади:

$$P_{i,t}^{obs} = P_{i,t} \exp(\eta_{i,t}/100), \quad (6)$$

бунда $\eta_{i,t}$ фоиздаги ўлчаш хатолигини англатиб, $\eta_{i,t} \sim N(0, \sigma(\eta_{i,t})^2)$ каби моделлаштирилади. $\sigma(\eta_{i,t})$ параметри бир қанча омилларга боғлиқ бўлади.

Одатий қимматли қоғозларни ифодаламайдиган (мисол учун UZONIA) r_t ставкаси учун кузатилган нархи 1 ва номинал нархи $1 + \tau r_t / (100 \cdot M)$ га тенг бўлган сунъий купонсиз облигация ҳосил қилинади ва бунда τ инструментнинг кунлардаги муддати, M бир йилдаги кунлар сони (365га тенг) ва r_t йиллик фоиз ставкасини билдиради.

(6) тенгликдаги ўлчаш хатолигини аниқлаш йўлидан ташқари, модел тўлиқ тавсифланиб бўлди. Қуйидаги жадвал модел параметрлари қийматини кўрсатади:

Параметрлар	Баҳоланадими?	Изоҳ
β_{i,s_k}	ҳа	$i = 0, 1, 2$ учун ва $k = 1, \dots, N$
λ	йўқ	Критик нуқта ўрни
$\sigma(\beta_i)$	йўқ	β_{i,s_k} жараёнининг стандарт хатолиги
$\sigma(\eta_{i,t})$	йўқ	t даврдаги i қимматли қоғознинг ўлчаш хатолиги

Модел параметрлари ва уларнинг қисқача тавсифи

Ушбу методологиянинг қолган қисмида β_{i,s_k} ларнинг баҳоланиши ва $\sigma(\eta_{i,t})$ ўлчаш хатоликлари қандай моделлаштирилиши кўриб чиқилади.

¹ Умумий қимматли қоғоз атамасидан ҳар қандай қатъий даромадли қарз инструментлари, пул бозори инструментлари, РЕПО аукционлари ва бошқаларни назарда тутиш учун фойдаланилади.

β_{i,s_k} параметрлар қуйидаги методлар ёрдамида баҳоланади:

Барча β_{i,s_k} параметрлар баҳосидан тузилган вектор B ; бошқа барча (калибрация қилинувчи) параметрлар вектори Θ ; $t^{min} \leq t \leq t^{max}$ кунлар учун барча мавжуд i қимматли қоғозларнинг кузатилмалари тўплами Y бўлсин. У ҳолда моделдаги муълумот эҳтимоллиги $L(Y|B, \Theta)$ бўлади. Θ ўзгармас бўлгани учун модели маълумотга мослиги (зичлигини) максималлаштирувчи B матрицани аниқлашимиз зарур:

$$p(B|Y, \Theta) \propto p(B|\Theta)L(Y|B, \Theta) \quad (7)$$

Бу қуйидагига эришиш учун B ни оптималлаштиришимизни англатади:

$$\max_B p(B|\Theta)L(Y|B, \Theta) \quad (8)$$

B параметрларнинг маълумот эҳтимоллиги ва зичлиги ўзаро эквивалентдир. Зичлик мос эркли тақсимотларнинг шоклари зичлигига тенг:

$$p(B|\Theta) = \prod_{i=1}^3 \prod_{k=2}^N \frac{1}{\sigma(\beta_i)\sqrt{2\pi}} e^{-\widehat{\varepsilon}_{i,k}^2/(2\sigma(\beta_i)^2)}, \quad (9)$$

бунда $\widehat{\varepsilon}_{i,k}$ — B маълум бўлгандаги хатоликлар қиймати.

Логарифмик маълумот эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$\log(p(B|\Theta)) = -\frac{3(N-1)}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=0}^2 \log(\sigma(\beta_i)) - \sum_{i=0}^2 \sum_{k=2}^N \frac{\widehat{\varepsilon}_{i,k}^2}{2\sigma(\beta_i)^2} \quad (10)$$

Кузатилмаларнинг маълумот эҳтимоллиги кузатилган ялпи нарх ва уларнинг назарий нархи фарқининг ўлчов хатолиги қийматига нисбати каби аниқланади, яъни:

$$L(Y|B, \Theta) = \prod_{i,t}^{\text{all obs}} \frac{1}{\sigma(\eta_{i,t})\sqrt{2\pi}} e^{-\widehat{\eta}_{i,t}^2/(2\sigma(\eta_{i,t})^2)}, \quad (11)$$

бунда $\widehat{\eta}_{i,t}$ ялпи нарх ва уларнинг назарий нархи фарқи:

$$\widehat{\eta}_{i,t} = 100 \log(P_{i,t}^{obs}/P_{i,t}). \quad (12)$$

Демак, баҳолаш алгоритми қуйидагича ифодаланиши мумкин:

- 1) Мавжуд маълумотларни Y каби мос шаклга келтириш;
- 2) Калибрация қилинувчи параметрлар Θ қийматини аниқлаш;
- 3) Беталар тўғрисида дастлабки фаразлар B_0 матрицасини шакллантириш;
- 4) $\log(p(B|Y, \Theta))$ нинг максимумини топиш учун B_0 дан бошлаб B ни оптималлаштириш;

- 5) Такрорланишларни тезлаштириш учун $\log(p(B|Y, \Theta))$ нинг градиенти ва Гессианидан фойдаланиш;
- 6) Оптимал $\hat{B}$ ни аниқлаш;
- 7) Бу барча $s_1 \leq t \leq s_N$ олдинги ва жорий даврлар учун $y_{t,\tau}$ даромадлилик эгри чизиқларини англатади.

Шуни таъкидлаш лозимки, баҳолаш алгоритми устма-уст вақт қаторли баҳолашдир (*stacked-time estimation*), яъни баҳолаш барча $s_1, \dots, s_N$ учун бир пайтда амалга оширилади.

(6) тенгликдаги ўлчов хатоликларини аниқлаш ва калибрлаш модели қуйидагича тавсифланади.

Моделни қандай калибрлаш кейинроқ қисқача тасвирлаб берилади. Ўлчов хатоликлари модели ҳар хил турдаги кузатувларга жавобан модел хатти-ҳаракатларига таъсир қилиш усулини тақдим этади. Бошқача қилиб айтганда, ўлчаш хатоликлари модели турли кузатувларга қандай вазн беришни ва шунинг учун кузатувлар баҳоланган эгри чизиқнинг шаклланишига қанчалик таъсир қилишини кўрсатади.

Маълумотларнинг вазнларини белгилаш мумкин бўлган қуйидаги ўлчамларни фарқлаймиз: қолдиқ тўлов муддати, бозор тури, жорий ёки муомаладаги облигациялар ва ҳажм. (13) тенглик ушбу ўлчамларни акс эттиради ва t давридаги i қимматли қоғоз учун $\sigma(\eta_{i,t})$ ўлчов хатосини омилларга ажратади:

$$\sigma(\eta_{i,t}) = \sigma \cdot \phi_{i,t}^{mkt} \cdot \phi_{i,t}^{rm} \cdot \phi_{i,t}^{off} \cdot \phi_{i,t}^{spr} \cdot \phi_{i,t}^{vol}, \quad (13)$$

бунда

- σ – модел ва маълумот ўртасидаги вазн
- $\phi_{i,t}^{mkt}$ – бозор турига боғлиқ вазн
- $\phi_{i,t}^{rm}$ – қолдиқ тўлов муддатига мос вазн
- $\phi_{i,t}^{off}$ – облигациялар вазни
- $\phi_{t,i}^{spr}$ – спредга мос келувчи вазн
- $\phi_{i,t}^{vol}$ – ҳажмга мос вазн

Кўпайтувчилар қуйида бирма-бир тавсифланади. Улар экспоненциал шаклга эга².

² Экспоненциал шаклни танлаш параметрларни талқин қилишни осонлик даражасидан келиб чиқиб танланади. Масалан, α_1 ва α_2 кўпайтувчиларнинг даражаси бўлсин, яъни

σ кўпайтувчиси модел ва маълумот ўртасидаги вазнини англатади. Бу бизга баҳоланган даромадлилик эгри чизигининг маълумотларга яқинроқ бўлиши ёки маълумотларни текислаш орқали моделга янада яқинроқ бўлишига таъсир қилиш имконини беради. σ қўйидагича моделлаштирилади

$$\sigma = e^{\alpha}, \quad (14)$$

бунда α — танланган ўзгармас сон. Агар α каттароқ бўлса, моделга кўпроқ вазн берилади ва вақт ўтиши билан даромадлилик эгри чизиги силлиқ бўлади. Агар α кичикроқ бўлса, маълумотларга кўпроқ вазн берилади ва даромадлилик эгри чизиги, айниқса тез ўзгаришлар даврида маълумотларга яқин бўлади.

ϕ_i^{mkt} кўпайтувчиси турли бозорлардан келаётган маълумотлар вазнини билдиради. Бунда пул бозорида бўлаётган операцияларга бошқа бозорлардан кўра кўпроқ вазн берилади ёки бирламчи бозорга иккиламчи бозордан кўпроқ вазн белгиланади. Бозор кўпайтувчиси қўйидагича:

$$\phi_{i,t}^{vol} = \begin{cases} (V^{pm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,pm}} & \text{бирламчи бозор учун} \\ (V^{sm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,sm}} & \text{иккиламчи бозор учун} \\ (V^{rrrepo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,rrrepo}} & \text{Марказий банкнинг ликвидликни} \\ & \text{жалб қилиш бўйича РЕПО} \\ & \text{аукционлари учун} \\ (V^{repo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,repo}} & \text{Марказий банкнинг ликвидликни} \\ & \text{тақдим этиш бўйича РЕПО} \\ & \text{аукционлари учун} \\ (V^{o/n\ depo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,o/n\ depo}} & \text{банклараро овернайт депозит} \\ & \text{ставкалари учун} \\ 1 & \text{маълумот йўқ бўлса (масалан,} \\ & \text{UZONIA)} \end{cases} \quad (15)$$

$\sigma(\eta_{i,t}) = \sigma \exp(\alpha_1 + \alpha_2)$. Эътибор беринг, (11) тенгликдаги маълумот эҳтимоллиги стандарт хатоликка бўлинган ҳақиқатдаги хатоликни қамраб олади ва бу қўйидагича тақрибан ҳисобланиши мумкин:

$$\frac{\widehat{\eta}_{i,t}}{\sigma(\eta_{i,t})} = \frac{\widehat{\eta}_{i,t}}{\sigma \exp(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx \frac{\widehat{\eta}_{i,t}(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma}$$

Бу α параметрлар ҳақиқий хатолик $\widehat{\eta}_{i,t}$ даги самарали камайиб бориш сифатида талқин қилиниши ва бу камайиш бўлақларига йиғинди сифатида қараш мумкинлигини англатади.

бунда UZONIA ставкалари ва шунга ўхшаш алфалар таъсирини камайтириш учун α_{UZONIA} қиймати танланади. Мулоҳазали кузатувлар бозори ҳозирда қўлланилмайди, лекин умуман олганда, бозорнинг энг юқори вазнини талаб қилувчи ҳар қандай мулоҳазали кузатувлар учун ишлатилиши мумкин.

$\phi_{i,t}^{rm}$ **кўпайтувчиси** қолдиқ тўлов муддатига мос вазнини билдиради. Бунда асосий мақсад агар йиллик даромадлилик ифодаланган бўлса, бир хил ўлчаш хатосини киритишдир. Бундан ташқари, ихтиёрий равишда қолдиқ муддати узоқ бўлган қимматли қоғозларга кичикроқ вазн қўйиш мумкин. t даврдаги i қимматли қоғознинг йилларда ифодаланган қолдиқ муддати m бўлсин. Кўпайтувчи бутунлай ҳисобга олинмаслиги ёки қуйидаги шаклда бўлиши мумкин:

$$\phi_{i,t}^{rm} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}e^{-4m} + m\right) e^{m \cdot \alpha_{rm}} & \text{агар ҳисобга олинса} \\ 1 & \text{агар ҳисобга олинмаса} \end{cases} \quad (16)$$

бунда $\alpha_{rm} \geq 0$ — қолдиқ даврнинг ҳар бир йили учун қўшимча жарима миқдори. Эътибор беринг, (6) тенгликдаги фоизда ифодаланган ялпи нарх ўлчов хатолиги $\sigma(\eta_{i,t})$ нинг бўлувчиси бу $\phi_{i,t}^{rm}$. (16) тенгликдаги m чизиқли ифодаси ўлчов хатолигини йиллик даромадлиликка айлантиради. Мисол учун, 1Y қолдиқ муддатдаги 1% нарх фарқи йиллик даромадлиликдаги эквивалент хатолик нуқтаи назаридан қолдиқ муддати m учун $m \times 1$ фарққа эквивалент.

Бироқ чизиқли ифода сифатида фақат m нинг сақлаб қолиниши қолдиқ муддат m нолга интилганида нархнинг ўлчаш хатоси нолга яқинлашишини англатади. Амалда нархларни кўрсатишда чекланган миқдордаги муҳим рақамлардангина фойдаланилганлиги учун ўлчов хатолари нолга яқинлашмайди. Яна бир сабаб шундаки, жуда қисқа муддатга эга бўлган инструментлар учун бозор деярли мавжуд эмас, чунки тўлов муддати яқин инструментлар учун мураккаб транзаксион харажатлар бўлиши мумкин. Шунинг учун, агар қолдиқ муддати нолга яқинлашса, $\phi_{i,t}^{rm}$ нинг қиймати 0,25 бўлишини кафолатлаш учун $1/4e^{4m}$ ифодаси қўшилади. Ва ниҳоят, $e^{m \cdot \alpha_{rm}}$ кўпайтувчи ифода қолдиқ муддатнинг ҳар бир йили учун қўшимча жаримани ифодалайди, лекин агар α_{rm} манфий бўлса, модел узоқроқ муддатли инструментларга кўпроқ вазн қўяди.

$\phi_{i,t}^{off}$ **кўпатувчиси** олдин чиқарилган (off-the-run) ва жорий чиқарилишдаги (on-the-run) облигациялар вазнини билдиради. Бунда олдин чиқарилган облигациялар бўйича кузатувлар жаримага тортилади. Δm_{min} йиллар сонидан танлансин. i қимматли қоғознинг t даврда сўндирилишгача қолган муддати m бўлсин. i облигация t даврда олдин чиқарилган деб қаралади

агар қолдиқ муддати $m + \Delta m_{min}$ дан катта бўлмаган янги қимматли қоғоз муомалага чиқарилса (Ғазначилик мажбурияти бўлиши шартмас). У ҳолда олдин чиқарилган облигация кўпайтувчиси:

$$\phi_{i,t}^{off} = \begin{cases} e^{\alpha_{off}} & \text{агар } i \text{ облигация } t \text{ даврда олдин чиқарилган бўлса} \\ 1 & \text{акс ҳолда} \end{cases} \quad (17)$$

бунда $\alpha_{off} \geq 0$ – олдин чиқарилган облигация учун танланган жарима.

$\phi_{t,i}^{spr}$ **кўпайтувчиси** кузатилган спред вазнини билдиради. Бунда каттароқ спредли операцияларга кичикроқ вазн берилади. j бозоридаги одатий операциянинг спреди S^j бўлсин (йиллик даромадлиликнинг фоиз банди ҳисобида). Кузатилган маълумотнинг кузатилган спреди $S_{t,i}$ бўлсин. У ҳолда операция спреди кўпайтувчиси:

$$\phi_{t,i}^{spr} = e^{\alpha_{spr,j}(S_{t,i}-S^j)/100}, \quad (18)$$

бунда $\alpha_{spr,j} \geq 0$ бу j бозор тури учун танланган эластиклик.

$\phi_{i,t}^{vol}$ **кўпайтувчиси** операция ҳажми бўйича вазни англатади. Бунда кичикроқ миқдордаги операцияларга камроқ вазн берилади. j бозор тури бўйича одатий операция ҳажми V^j бўлсин. t даврдаги i қимматли қоғознинг операция ҳажми $V_{i,t}$ бўлсин. У ҳолда операция ҳажми кўпайтувчиси:

$$\phi_{i,t}^{vol} = \begin{cases} (V^{pm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,pm}} & \text{бирламчи бозор учун} \\ (V^{sm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,sm}} & \text{иккиламчи бозор учун} \\ (V^{repo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,repo}} & \text{Марказий банкнинг ликвидликни жалб қилиш бўйича РЕПО аукционлари учун} \\ (V^{o/n\ depo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,o/n\ depo}} & \text{Марказий банкнинг ликвидликни тақдим этиш бўйича РЕПО аукционлари учун} \\ 1 & \text{банклараро овернайт депозит ставкалари учун} \\ 1 & \text{маълумот йўқ бўлса (масалан, UZONIA)} \end{cases} \quad (19)$$

бунда $\alpha_{vol,j} \geq 0$ бу j бозор тури учун танланган эластиклик.