ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТОДОЛОГИЯ
оценки кривой доходности государственных ценных бумаг

Для построения кривой доходности государственных ценных бумаг применялись следующие теоретические понятия и формулы.

В основе модели лежит модель Нельсона-Зигеля,[1] которая описывает кривую бескупонной доходности в каждый конкретный день t. Модель имеет параметры изменяющиеся во времени $\beta_{0,t}, \beta_{1,t}, \beta_{2,t}$ и постоянные параметры λ. Непрерывная сложная бескупонная доходность $y_{t,\tau}$ в данный день t с определенным сроком τ моделируется как:

$$y_{t,\tau} = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + \beta_{2,t}\left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \tag{1}$$

Обратите внимание, что в данной методике время измеряется в днях, и при определении денежных потоков по наблюдаемым инструментам и оценки параметров модели используется принцип Actual/365L. Следовательно, годы считаются состоящими из 365 дней или 366 дней в високосные годы. Однако, когда доходность указывается в процентах годовых, учитывается 365 дней в году.

Вместе с тем, ежедневная независимая оценка этих параметров в условиях дефицита данных приведет к крайне неустойчивым результатам. Поэтому процедура оценки предполагает, что β_{i,t_1} и β_{i,t_2} каким-то образом связаны, то есть они не сильно меняются от периода к периоду. То, как $\beta_{i,t}$ меняется с течением времени t, формализуется с помощью стохастической модели, описанной ниже.

В то же время, оценка модели в 120-дневном скользящем окне с тремя изменяющимися во времени beta параметрами подразумевает огромный набор параметров для оценки, причем оценка занимает много времени, тогда как необходим только последний набор параметров для идентификации сегодняшней кривой (в дальнейшем обозначаемый как t^{max}). На следующей неделе используется новое 120-дневное окно.

Таким образом, в процедуре оценки применяются следующие ограничения: Создается сетка дней, обозначаемых как $s_1, s_2, \ldots, s_N$, которые равномерно распределены, чтобы покрыть все 120-дневное окно оценки. В частности, определяется что $s_1 \leq t^{min}$ и $s_N \geq t^{max}$. В первоначальной калибровке, используется 28-дневный интервал, каждый интервал $s_k - s_{k-1}$ делается равным 28 дням для всех k. Однако, общая модель допускает гибкость

[1] Nelson, C.R., Siegel, A.F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves, Journal of Business, 60(4), pp. 473–489

в данном отношении. Это выражается в $N = 6$ периодам, и соответственно шести наборам параметров в отличии от 120 в общей модели.

При построении сетки s_N располагается так, чтобы оно совпадало с последней датой расчетов по всем имеющимся сделкам в наборе данных (обычно сегодня плюс один или два дня), помещая его в середину последнего интервала. Затем устанавливаются оставшиеся $s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}$ в соответствии с выбранным интервалом, чтобы покрыть все окно оценки.

Все β_{i,s_k} параметры в выбранной сетке моделируются на основе процесса случайного блуждания:

$$\beta_{i,s_k} = \beta_{i,s_{k-1}} + \varepsilon_{i,k}, \quad \text{for } i = 0, \ldots, 2, \, k = 2, \ldots, N, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{i,k} \sim N(0, \sigma(\beta_i)^2)$ с $\sigma(\beta_i)$ будут неизменными во времени стандартными ошибками оценки.

Результаты показаны на рис 1. $\beta_{i,t}$ определяется как:

$$\beta_{i,t} = \begin{cases} \beta_{i,s_k} & \text{if } s_k = t \\ \\ \frac{s_k - t}{s_k - s_{k-1}} \beta_{i,s_{k-1}} + \frac{t - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \beta_{i,s_k} & \text{if } s_{k-1} < t < s_k \end{cases} \tag{3}$$

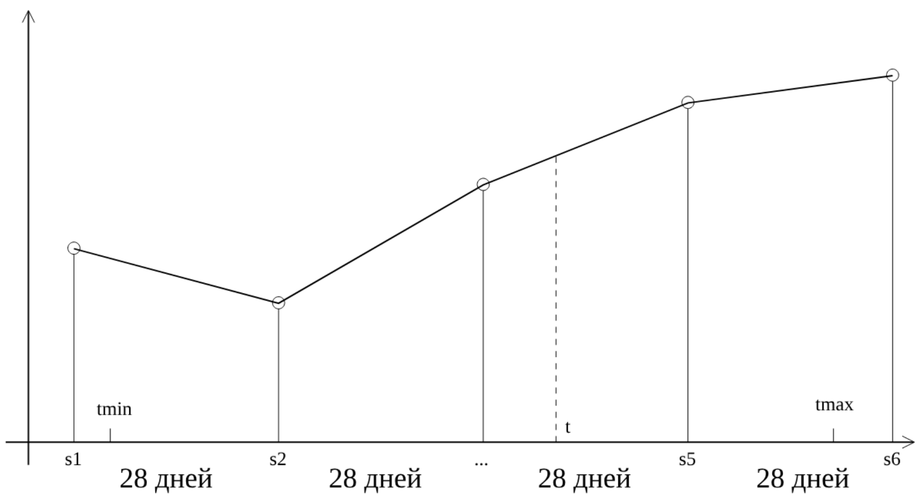

Рис 1: Интерполяция параметров beta

Существует два метода связать непрерывные сложные бескупонные ставки $y_{t,\tau}$ из уравнения (1) с наблюдаемыми ценами в исторических сделках. В данной методологии, нулевые ставки $y_{t,\tau}$ связываются с реальными транзакциями через дисконтированное суммирование денежных потоков инструментов. Альтернативный подход, иногда используемый в практических моделях кривых доходности, заключается в том, чтобы напрямую (после соответствующих преобразований данных) связать нулевые ставки $y_{t,\tau}$ с котировками доходности к погашению по историческим сделкам. Однако это вносит внутреннюю несогласованность в модель, которая более существенна для рынков, где инструменты с фиксированным доходом имеют высокие купонные ставки.

Пусть $P_{i,t}$ грязная цена какой-либо ценной бумаги[2] i в период t. Цена может быть рассчитана на основе денежных потоков и коэффициентов дисконтирования.

$$P_{i,t} = \sum_j c_{i,j} d_{t,\tau_j}, \tag{4}$$

где j количество всех будущих денежных потоков бумаги i, $c_{i,j}$ j-й денежный поток, d_{t,τ_j} коэффициент дисконтирования между периодами t и $t + \tau_j$, когда возникают денежные потоки. Коэффициенты дисконтирования определяются с помощью кривой доходности, выраженной в непрерывно начисляемой доходности $y_{t,\tau}$ в процентах годовых:

$$y_{t,\tau} = -\frac{100 \cdot M}{\tau} \log(d_{t,\tau}), \tag{5}$$

где M параметр модели, откалиброванный на 365, представляющий количество дней в году.

Таким образом можно теоретически расчитать грязную цену бумаги $P_{i,t}$. Однако, грязная цена наблюдается с некоторой ошибкой:

$$P_{i,t}^{obs} = P_{i,t} \exp(\eta_{i,t}/100), \tag{6}$$

где $\eta_{i,t}$ ошибка измерения выраженная в процентах и моделируемая как $\eta_{i,t} \sim N(0, \sigma(\eta_{i,t})^2)$. Параметр $\sigma(\eta_{i,t})$ зависит от многих обстоятельств.

Для ставок r_t которые не представляют типичные ценные бумаги (например UZONIA), создается условная ценная бумага с нулевым купоном и наблюдаемой ценой 1 и ценой $1 + \tau r_t/(100 \cdot M)$, где τ срок погашения инструмента в днях, M количество дней в году равное 365, и r_t наблюдаемая котировка в процентах годовых.

Помимо описания того, как определяются ошибки измерения в уравнении (6) модель теперь полностью определена. В таблице ниже приведены параметры данной модели.

В этом разделе будет описано как оценить β_{i,s_k}. Пусть B вектор всех оцененных β_{i,s_k}; Θ вектор остальных (калиброванных) параметров; Y набор всех данных по всем доступным ценным бумагам i для дней $t^{min} \leq t \leq t^{max}$. Тогда правдоподобие наблюдаемых данных в этой модели будет выражатся как

[2] Используется общее понятие ”ценной бумаги”для обозначения любого долгового инструмента с фиксированным доходом, инструмента денежного рынка, депозитных аукционов, операций РЕПО и т.д.

Параметры	Оценки	Комментарии
β_{i,s_k}	да	Для $i = 0, 1, 2$ and $k = 1, \dots, N$
λ	нет	Позиция выпуклости
$\sigma(\beta_i)$	нет	Размер шока для β_{i,s_k} процесса
$\sigma(\eta_{i,t})$	нет	Ошибка оценки для бумаги i в t

Табл.1. Параметры модели и их краткое описание

$L(Y|B,\Theta)$. Так как Θ фиксированы, находится B для максимизации подбора (плотности).

$$p(B|Y,\Theta) \propto p(B|\Theta)L(Y|B,\Theta) \tag{7}$$

Это означает оптимизацию B для достижения:

$$\max_B p(B|\Theta)L(Y|B,\Theta) \tag{8}$$

Правдоподобие и плотность параметров B равны. Плотность равна плотности предполагаемых шоков в их соответствующих независимых распределениях:

$$p(B|\Theta) = \prod_{i=1}^{3}\prod_{k=2}^{N} \frac{1}{\sigma(\beta_i)\sqrt{2\pi}} e^{-\widehat{\varepsilon_{i,k}}^2/(2\sigma(\beta_i)^2)}, \tag{9}$$

где $\widehat{\varepsilon_{i,k}}$ реализация шоков заданных B.

Логарифм (log) правдоподобия определяется как:

$$\begin{aligned} \log(p(B|\Theta)) &= -\frac{3(N-1)}{2}\log(2\pi) - \sum_{i=0}^{2}\log(\sigma(\beta_i)) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=2}^{N}\frac{\widehat{\varepsilon_{i,k}}^2}{2\sigma(\beta_i)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Правдоподобие данных задается отклонением реальных грязных цен от их теоретических значений взвешенным на значение ошибок, т.е.:

$$L(Y|B,\Theta) = \prod_{i,t}^{\text{all obs}} \frac{1}{\sigma(\eta_{i,t})\sqrt{2\pi}} e^{-\widehat{\eta_{i,k}}^2/(2\sigma(\eta_{i,t})^2)}, \tag{11}$$

где $\widehat{\eta_{i,t}}$ текущее отклонение от теоретической грязной цены

$$\widehat{\eta_{i,t}} = 100\log(P_{i,t}^{obs}/P_{i,t}). \tag{12}$$

Таким образом, алгоритм оценки может быть определен следующим образом:

1. Обработка входных данных Y в подходящую структуру

2. Получение калиброванных параметров Θ

3. Получение первоначальных оценок B_0

4. Оптимизация B начиная от B_0 для получения максимума $\log(p(B|Y,\Theta))$

5. Использование градиента и Гессиана $\log(p(B|Y,\Theta))$ для ускорения вычислений

6. Получение оптимального $\widehat{B}$

7. Это определяет исторические и текущие кривые доходности $y_{t,\tau}$ для всех $s_1 \leq t \leq s_N$

Важно отметить, что алгоритм оценки является одновременным, то есть оценка производится одновременно для всех $s_1, \ldots, s_N$.

В этом разделе описывается модель для определения и калибровки ошибок измерений в уравнении (6). Далее кратко описывается калибровка модели. Модель ошибок измерения дает возможность влиять на поведение модели в ответ на наблюдения различных типов. Другими словами, модель ошибок измерений позволяет определить, как взвешивать различные наблюдения и, следовательно, как сильно они будут влиять на формирование расчетной кривой.

Выделяются следующие параметры, по которым можно определить вес: остаточный срок погашения, тип рынка, эмитируемые бумаги, бумаги в обращении, а также объем. Уравнение (13) отражает эти измерения, сокращая погрешность измерения $\sigma(\eta_{i,t})$ для бумаги i в период t на эти факторы.

$$\sigma(\eta_{i,t}) = \sigma \cdot \phi_{i,t}^{mkt} \cdot \phi_{i,t}^{rm} \cdot \phi_{i,t}^{off} \cdot \phi_{i,t}^{spr} \cdot \phi_{i,t}^{vol}, \tag{13}$$

где

- σ отражает вес между моделью и данными,
- $\phi_{i,t}^{mkt}$ отражает вес зависящий от сегмента рынка,
- $\phi_{i,t}^{rm}$ представляет собой вес в зависимости от срока погашения,
- $\phi_{i,t}^{off}$ отражает вес эмитируемых/обращающихся бумаг,
- $\phi_{t,i}^{spr}$ отражает вес по спрэду,
- $\phi_{i,t}^{vol}$ вес по объему.

Подробное описание факторов. Факторы принимают экспоненциальную форму.[3]

Фактор σ представляет собой вес между моделью и данными. Это позволяет влиять на то, будет ли расчетная кривая доходности более точно следовать данным, или же она скорее сгладит данные и будет более точно следовать модели. σ моделируется как

$$\sigma = e^{\alpha}, \tag{14}$$

где α выбранная постоянная. Ниже объясняется, почему выбрана экспоненциальная форма. Если α увеличивается, то придается модели больший вес, и кривая доходности, скорее всего, будет сглажена с течением времени. Если α уменьшается, тогда придается большее значение данным, и кривая доходности будет стремиться более точно следовать за данными, особенно в периоды быстрых изменений.

Фактор ϕ_i^{mkt} представляет вес информации поступающей с разных рынков. Идея состоит в том, чтобы придать больший вес операциям на денежном рынке, чем на других рынках, или больший вес первичным рынкам, чем вторичным. Рыночный фактор - это

$$\phi_{i,t}^{mkt} = \begin{cases} e^{\alpha_{pm}} & \text{для первичного рынка} \\ e^{\alpha_{sm}} & \text{для вторичного рынка} \\ e^{\alpha_{UZONIA}} & \text{для ставки UZONIA} \\ e^{\alpha_{overnight\ repo}} & \text{для ставок межбанковского овернайт репо} \\ e^{\alpha_{repo}} & \text{для операций ЦБ РЕПО} \\ e^{\alpha_{da}} & \text{для депозитных аукционов ЦБ} \\ e^{\alpha_{quote}} & \text{для котировок вторичного рынка} \\ e^{\alpha_{judg}} & \text{для оценочных данных} \end{cases} \tag{15}$$

где α_{UZONIA} является выбранным надбавкой для ставок UZONIA и аналогично других альф. Рынок оценочных наблюдений в настоящее время не используется, но в целом может быть использован для любых оценочных наблюдений, требующих наибольшего рыночного веса.

[3] Выбор экспоненциальной формы обусловлен простотой интерпретации параметров. Чтобы проиллюстрировать это, пусть α_1 and α_2 две экспоненты факторов, поэтому $\sigma(\eta_{i,t}) = \sigma \exp(\alpha_1 + \alpha_2)$. Заметим, что уравнение правдоподобия (11) включает фактическую ошибку, взвешенную на стандартную ошибку, которую можно аппроксимировать:

$$\frac{\widehat{\eta_{i,t}}}{\sigma(\eta_{i,t})} = \frac{\widehat{\eta_{i,t}}}{\sigma \exp(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx \frac{\widehat{\eta_{i,t}}(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma}$$

Это означает что параметры α можно интерпретировать как эффективное снижение фактической ошибки $\widehat{\eta_{i,t}}$ в долях и что эти доли аддитивны.

Фактор $\phi_{i,t}^{rm}$ представляет собой вес в зависимости от остатка срока до погашения. Основная цель - добиться такой же погрешности измерения, как и при выражении доходности в годовом исчислении. Кроме того, можно, но только по желанию, установить меньший вес для бумаг с длительным остаточным сроком погашения.

Пусть m остаточный срок погашения, выраженный в годах, бумаги i в период t. Фактор может быть полностью отключен или иметь вид:

$$\phi_{i,t}^{rm} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}e^{-4m} + m\right) e^{m \cdot \alpha_{rm}} & \text{если включен} \\ 1 & \text{если отключен} \end{cases} \quad (16)$$

где $\alpha_{rm} \geq 0$ дополнительная надбавка за оставшийся срок до погашения. Отметим что, $\phi_{i,t}^{rm}$ взвешивает ошибку измерения $\sigma(\eta_{i,t})$ в уравнении (6) которое определяется как процент грязной цены. Линейный фактор m в уравнении (16) взвешивает оценку ошибки по годовой доходности. Например, на 1 процент различия в цене в 1-годовом сроке до погашения равен m умноженном на 1 процент разницы для остатка срока погашения m в пересчете на эквивалентную ошибку в доходности в год.

Однако, сохранение m как линейного фактора означало бы, что ошибка измерения цены сходится к нулю с остаточным сроком погашения m, стремящимся к нулю. На практике ошибки измерения не сходятся к нулю из-за такого факта, как ограниченное количество значащих цифр, используемых при котировке цен. Другая причина заключается в том, что для инструментов с очень короткими сроками погашения существует тонкий рынок, поскольку вблизи даты погашения могут возникать дополнительные операционные издержки. Поэтому добавлено условие $1/4e^{4m}$ для того, чтобы гарантировать что, $\phi_{i,t}^{rm}$ равен 0.25 если остаточный срок стремится к нулю. Мультипликативный коэффициент $e^{m \cdot \alpha_{rm}}$ представляет собой дополнительную надбавку за каждый год остаточного срока погашения, но если α_{rm} отрицательный, то модель накладывает больший вес на инструменты с более длительным сроком погашения.

Фактор $\phi_{i,t}^{off}$ представляет вес эмитируемых бумаг против бумаг в обращении. Идея заключается в надбавке для облигаций выпущенных ранее. Пусть Δm_{min} заданное число лет. Пусть m определяет остаточный срок бумаги i в период t. Бумага i считается раннее выпущенной в период t если есть более новые бумаги со сроком погашения не более чем $m + \Delta m_{min}$. Таким образом фактор бумаг выпущенных ранее это:

$$\phi_{i,t}^{off} = \begin{cases} e^{\alpha_{off}} \\ 1 \end{cases} \quad (17)$$

где $\alpha_{off} \geq 0$ надбавка за бумаги выпущенные ранее.

Фактор $\phi_{t,i}^{spr}$ веса исходя из спрэда. Идея состоит в том, чтобы дать меньший вес транзакциям с большим спрэдом.

Пусть S^j спрэд (в процентах к годовому доходу) типичный для сделок на рынке j. Пусть $S_{t,i}$ наблюдаемый спрэд транзакций (аукционы, котировки и др.). Тогда фактор спрэда транзакций это

$$\phi_{t,i}^{spr} = e^{\alpha_{spr,j}(S_{t,i}-S^j)/100}, \tag{18}$$

где $\alpha_{spr,} \geq 0$ выбранная эластичность для типа рынка j.

Фактор $\phi_{i,t}^{vol}$ представляет вес исходя из объемов наблюдаемых сделок. Идея состоит в том, что транзакции с малыми объемами имеют меньший вес. Пусть V^j типичный объем транзакций на рынке типа j. Пусть $V_{i,t}$ наблюдаемый объем транзакций бумаги i в период t. Тогда фактор объема транзакций имеет вид:

$$\phi_{i,t}^{vol} = \begin{cases} (V^{pm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,pm}} & \text{для первичного рынка} \\ (V^{sm}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,sm}} & \text{для вторичного рынка} \\ \left(V^{da}/V_{i,t}\right)^{\alpha_{vol,da}} & \text{для депозитных аукционов ЦБ} \\ (V^{repo}/V_{i,t})^{\alpha_{vol,repo}} & \text{для операций РЕПО ЦБ} \\ \left(V^{overnight\ repo}/V_{i,t}\right)^{\alpha_{vol,overnight\ repo}} & \text{для ставок межбанковского овернайт репо} \\ 1 & \text{без информации (например UZONIA)} \end{cases}$$

где $\alpha_{vol,j} \geq 0$ эластичность для рынка типа j.