Кубик сплайн интерполяцияси
(Cubic spline interpolation)

Р. Махаммадиев, У. Джуманазаров, Ш. Маҳмудов,
С. Абдуғаниев

Аннотация

Ушбу мақолада маълум нуқталар тўпламидан ўтадиган узлуксиз ҳосилаларга эга учинчи даражали узлуксиз эгри чизиқ функциясини ҳосил қилиш усули ёритилган. Кубик сплайн интерполяциясида эгри чизиқ функциясининг номаълум коэффициентларини аниқлашда барча маълумотлар нуқталарида интерполяцияланганлиги, шунингдек ушбу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари маълум оралиқларда узлуксизлиги хоссаларидан фойдаланилади. Мазкур мақола кубий сплайн интерполяцияси орқали йиллик ёки чораклик кўринишдаги маълумотларни юқорироқ аниқликда ойлик ёки чораклик кўринишга ўтказиш тизимини такомиллаштириш мақсадида тайёрланган.

Таянч сўзлар: эгри чизиқ функцияси, ҳосила, интерполяция, кубик сплайн, матрица.

Кубик сплайн интерполяцияси (Cubic spline interpolation)

Кубик сплайн интерполяцияси[1] бир нечта нуқталар орқали ўтадиган учинчи даражали узлуксиз эгри чизиқ функциясини ҳосил қилиш усули ҳисобланади. Ушбу усул орқали аниқланган узлуксиз эгри чизиқ функцияси нуқталар орасидаги маълумотларни аниқроқ ифодалашга хизмат қилади.

Кубик сплайн интерполяцияси методологиясига[2] кўра бир нечта нуқталар орқали ўтадиган узлуксиз эгри чизиқ функцияси қуйидагича ифодаланади:

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) \text{ агар } x_1 \le x \le x_2 \\ s_2(x) \text{ агар } x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots \\ s_{n-1}(x) \text{ агар } x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$
$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Бу ерда, s_i – учинчи даражали эгри чизиқ функцияси, n – нуқталар сони, x_n – нуқталар жойлашган даврлар, a_i, b_i, c_i ва d_i – эгри чизиқ функциясининг номаълум коэффициентлари.

Юқоридаги учинчи даражали эгри чизиқ функциясидан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар олинади:

$$s_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$
$$s_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$
$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Шунингдек, функция таркибидаги номаълум коэффициентларини аниқлашда кубик сплайн интерполяциясининг $S(x)$ функцияси барча маълумотлар нуқталарида интерполяцияланганлиги, шунингдек $S(x)$

[1] Берилган нуқталар тўпламидан ўтадиган узлуксиз ҳосилаларга эга учинчи даражали узлуксиз эгри чизиқ.

[2] McKinley, S., & Levine, M. (1998). Cubic Spline Interpolation.

функцияси, ушбу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари $[x_1, x_n]$ оралиқда узлуксизлиги хоссаларидан фойдаланилади.

$S(x)$ функцияси барча маълумотлар нуқталарида интерполяциялаши хусусиятидан келиб чиққан ҳолда, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$s_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(x_i - x_i) + d_i$$
$$s_i(x_i) = d_i$$

Эгри чизиқ функцияси бутун оралиқ бўйлаб узлуксиз бўлиш хоссасига кўра, ҳар бир субфункциялар маълум нуқталарида бирлашади:

$$s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$$
$$i = 2, \dots, n$$
$$s_{i-1}(x_i) = a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1}$$
$$d_i = a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1}$$
$$i = 2, \dots, n-1$$
$$h = x_i - x_{i-1}$$
$$d_i = a_{i-1}h^3 + b_{i-1}h^2 + c_{i-1}h + d_{i-1}$$

$S(x)$ функциясининг биринчи тартибли ҳосиласи $[x_1, x_n]$ оралиғида узлуксиз бўлиш хоссасига кўра, қуйидаги тенгликлар ҳосил бўлади:

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i)$$
$$s_i'(x_i) = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i$$
$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i) = c_i$$
$$c_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}$$
$$c_i = 3a_{i-1}h^2 + 2b_{i-1}h + c_{i-1}$$

$S(x)$ функциясининг иккинчи тартибли ҳосиласи $[x_1, x_n]$ оралиғида узлуксиз бўлиш хоссасидан келиб чиққан ҳолда, қуйидагича аниқланади:

$$s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i)$$
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$$

$$s_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i$$
$$s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i) = 2b_i$$
$$2b_i = 6a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 2b_{i-1}$$
$$2b_i = 6a_{i-1}h + 2b_{i-1}$$
$$2b_{i+1} = 6a_i h + 2b_i$$

$s_i''(x_i) = M_i$ белгилаш киритилиб, юқоридаги ифодалар соддалаштирилади:

$$s_i''(x_i) = 2b_i$$
$$M_i = 2b_i$$
$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

d_i қиймати $S(x)$ функциянинг x_i нуқтадаги қийматига тенг бўлади ($s_i(x_i) = d_i$). a_i қиймати эса, юқоридаги белгилашлар орқали қайтадан ифодаланади:

$$2b_{i+1} = 6a_i h + 2b_i$$
$$6a_i h = 2b_{i+1} - 2b_i$$
$$a_i = \frac{2b_{i+1} - 2b_i}{6h}$$
$$a_i = \frac{2\left(\frac{M_{i+1}}{2}\right) - 2\left(\frac{M_i}{2}\right)}{6h}$$
$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

c_i коэффициент қиймати киритилган белгилашлар орқали қайтадан ифодаланади:

$$d_{i+1} = a_i h^3 + b_i h^2 + c_i h + d_i$$
$$c_i h = d_{i+1} - a_i h^3 - b_i h^2 - d_i$$
$$c_i = \frac{d_{i+1} - a_i h^3 - b_i h^2 - d_i}{h}$$
$$c_i = (-a_i h^2 - b_i h) - \frac{d_i - d_{i+1}}{h}$$

$$c_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{h} - (\frac{M_{i+1} - M_i}{6h} h^2 - \frac{M_i}{2} h)$$
$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) h$$

Аниқланган тенгликлар орқали узлуксиз эгри чизиқ функциясининг номаълум коэффициентларини ҳисоблаш учун қуйидаги ифодалар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\ b_i = \dfrac{M_i}{2} \\ c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\dfrac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) h \\ d_i = y_i \end{cases}$$

Узлуксиз эгри чизиқ функциясининг иккинчи тартибли ҳосиласини $(s_i''(x_i) = M_i)$ аниқлаш ушбу эгри чизиқ функциясининг номаълум коэффициентларини ҳисоблаш учун етарли бўлади. Бунда, номаълум қийматларни аниқлашни бирмунча осонлаштириш мақсадида ифодалар матрица кўринишига келтирилади:

$$c_{i+1} = 3a_i h^2 + 2b_i h + c_i$$

$$3\left(\frac{M_{i+1} - M_i}{6h}\right) h^2 + 2\left(\frac{M_i}{2}\right) h + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) h = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - \left(\frac{M_{i+2} + 2M_{i+1}}{6}\right) h$$

$$h\left(\frac{3M_{i+1} - 3M_i}{6} + \frac{6M_i}{6} - \left(\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) + \left(\frac{M_{i+2} + 2M_{i+1}}{6}\right)\right) = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h}$$

$$\frac{h}{6} * (M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2}) = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h}$$

$$M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6\left(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}\right)$$

$$i = 1,2,3, \dots, n-1$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}
$$

Ҳосил бўлган матрица тенгламасида n та номаълум $(M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n)$ ҳамда $n-2$ та тенглик мавжуд. Бу эса, номаълумларни тўлиқ аниқлаш имконини бермайди. Шу сабабли, номаълум қийматлар кубик сплайн интерполяциясининг бошланғич ва охирги чегарадаги субфункциялари учун табиий сплайн (natural splines), параболик чегаравий сплайн (parabolic runout spline) ва кубик чегаравий сплайн (cubic runout spline) шартларини киритиш орқали аниқланади.

Табиий сплайн (natural splines) шарти $S(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $(s_i''(x_i) = M_i)$ биринчи ва охирги нуқталарида нолга тенг бўлишини $(M_1 = M_n = 0)$ ўз ичига олади. Бунинг натижасида, юқоридаги матрица тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}
$$

Матрицани соддалаштириш мақсадида M_1 ва M_n нолга тенг бўлганлиги сабабли уларнинг қийматларига мос келувчи дастлабки матрицанинг биринчи ва охирги устунлари олиб ташланади.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Ҳосил бўлган матрицадан кўриш мумкинки $n-2$ та номаълум $(M_2, M_3, \dots, M_{n-2}, M_{n-1})$ ҳамда $n-2$ та тенглик мавжуд, натижада M_2 дан M_{n-1} гача бўлган номаълум қийматлар аниқланади. Аниқланган M_i қийматлари асосида узлуксиз эгри чизиқ функцияси номаълум коэффициентлари ҳисобланиб, бир нечта нуқталар орқали ўтадиган узлуксиз эгри чизиқ функцияси аниқланади.

Параболик чегаравий сплайн (parabolic runout spline) шарти $S(x)$ функцияни иккинчи тартибли ҳосиласининг $(s_i''(x_i) = M_i)$ биринчи ва охирги нуқталари, мос равишда иккинчи ва охиридан битта олдинги нуқталарига тенг бўлишини $(M_1 = M_2 \text{ ва } M_n = M_{n-1})$ ўз ичига олади. Натижада, юқоридаги дастлабки матрица тенгламаси қуйидаги кўринишига келади:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Матрица тенгламасини ечиш орқали M_2 дан M_{n-1} гача бўлган номаълум қийматлар аниқланади. Аниқланган M_i қийматлари асосида узлуксиз эгри чизиқ функцияси номаълум коэффициентлари ҳисобланиб, бир нечта нуқталар орқали ўтадиган узлуксиз эгри чизиқ функцияси аниқланади.

Кубик чегаравий сплайн (cubic runout spline) шарти $S(x)$ функцияни иккинчи тартибли ҳосиласининг $(s_i''(x_i) = M_i)$ маълум муносабатларини $(M_1 = 2M_2 - M_3 \text{ ва } M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2})$ ўз ичига олади ва юқоридаги матрица тенгламаси қуйидаги кўринишига келади:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Ҳосил бўлган матрицада $n-2$ та номаълум $(M_2, M_3, \dots, M_{n-2}, M_{n-1})$ ҳамда $n-2$ та тенглик мавжуд. Шу орқали, M_2 дан M_{n-1} гача бўлган номаълум қийматлар аниқланади.

Кубик сплайн интерполяциясининг юқоридаги шартлари бўйича аниқланган M_i қийматлари асосида $S(x)$ функциясининг номаълум коэффициентлари ҳисобланади. Натижада, бир нечта нуқталар орқали ўтадиган учинчи даражали узлуксиз эгри чизиқ функцияси топилади.