

Ekstremal qiymatlar nazariyasi (Extreme Value Theory)

Annotatsiya

Mazkur metodologik asos mamlakat bank tizimiga salbiy ta'sir qiluvchi xatarlarning ekstremal qiymatlarini miqdoriy jihatdan aniqlashga va ushbu xatarlarning tizim orqali tarqalishini tahlil qilishga qaratilgan yondashuvni joriy etish yuzasidan tayyorlangan. Bunda, banklardagi valyuta xatarini baholashning ekstremal qiymatlar nazariyasiga asoslangan yondashuvi yoritilgan. Xususan, ushbu yondashuvda valyuta kursining tarixiy o'zgaruvchanligidan kelib chiqib keyingi davrda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan valyuta kursining ekstremal qiymatlari aniqlanadi, shuningdek valyuta kursi o'zgarishining banklar balansiga ta'siri baholanadi.

Tayanch so'zlar: bank, valyuta kursi, dispersiya, model, taqsimot, tasodifiy, chegara, xatolik, ekstremal, GARCH.

Ekstremal qiymatlar nazariyasi (Extreme Value Theory)

Ekstremal qiymatlar nazariyasiga (Extreme Value Theory, EVT) asoslangan yondashuv bank tizimiga salbiy ta'sir qiluvchi xatarlarning ekstremal qiymatlarini miqdoriy jihatdan aniqlashga va ushbu xatarlarning tizim orqali tarqalishini tahlil qilishga qaratilgan¹. Xususan, ushbu yondashuv valyuta kursining tarixiy o'zgaruvchanligidan kelib chiqib, valyuta kursining keyingi davrda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan ekstremal qiymatlarini baholash imkonini beradi.

EVT asosida baholangan valyuta kursining o'zgarishi bank balansidagi xorijiy valyutadagi aktivlar va xorijiy valyutadagi majburiyatlarning so'mdagi nominal qiymatini o'zgarishiga olib keladi. Ushbu o'zgarishlar ta'sirida xorijiy valyutadagi aktivlar va majburiyatlar o'rtasidagi nomutanosiblik tufayli banklarga salbiy ta'sir kuzatilishi mumkin. Shu bilan birga, valyuta kursi xatari tufayli hosil bo'ladigan yirik yo'qotishlar ta'sirida ayrim banklarda yuzaga kelgan defolt holatlarining tarqalish xatarini keltirib chiqarishi mumkinligi ham tahlil qilinadi.

Valyuta kursi o'zgaruvchanligi logarifmik shaklda quyidagicha aniqlanadi:

$$r_t = \log\left(\frac{FX_t}{FX_{t-1}}\right) = \log(FX_t) - \log(FX_{t-1})$$

Bu yerda,

$r_t - t$ davrdagi valyuta kursi logarifmik o'zgaruvchanligi;

$FX_t - t$ davrdagi milliy valyuta kursining xorijiy valyutadagi nominal qiymati;

$FX_{t-1} - (t - 1)$ davrdagi milliy valyuta kursining xorijiy valyutadagi nominal qiymati.

Asosiy e'tibor milliy valyuta kursining qadrsizlanishiga qaratilganligi sababli valyuta kursi o'zgaruvchanligi manfiy ishora bilan qayta aniqlanadi va $y_t = -r_t$ deb belgilanadi². Valyuta kursi manfiy o'zgaruvchanligining dinamikasi quyidagi ko'rinishda stoxastik jarayon³ sifatida modellashiriladi:

¹ Nikzad, R. (2011). Extreme Value Theory with an Application to Bank Failures through Contagion. University of Ottawa.

² Titov, C. (2022). Forecasting Exchange Rate Value-at-Risk and Expected Shortfall: A GARCH-EVT Approach. School of Economics and Management, Lund University.

³ Stoxastik jarayon – bu vaqt davomida tasodifiylik ta'sirida rivojlanib boradigan jarayon.

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = Z_t \sigma_t$$

Bu yerda,

y_t – valyuta kursining manfiy o'zgaruvchanligi;

μ_t – shartli o'rtacha;

σ_t – shartli standart og'ish;

$z_t \sim F(0, 1)$ – standart Styudent-t taqsimotiga⁴ ega bo'lgan mustaqil va bir xil taqsimlangan tasodifiy jarayon.

Shartli o'rtacha va shartli dispersiya qiymatlari $(t - 1)$ vaqtgacha bo'lgan ma'lumotlar to'plamiga nisbatan baholanadi va ushbu ma'lumotlar to'plami G_{t-1} orqali belgilanadi. Shartli o'rtacha μ_t va shartli dispersiya σ_t^2 qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\mu_t = E(y_t | G_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = Var(y_t | G_{t-1})$$

Bu yerda, $E(y_t | G_{t-1})$ va $Var(y_t | G_{t-1})$ mos ravishda shartli o'rtacha va shartli dispersiyani bildiradi.

EVT yondashuvi uchun ma'lumotlar mustaqil va bir xil taqsimlangan bo'lishi talab qilinadi. Mustaqil va bir xil taqsimlangan qoldiqlarga yaqinlashish uchun vaqt qatorlariga avtoregressiv harakatlanuvchi o'rtacha (Autoregressive Moving Average, ARMA) va turli umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastiklik (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) modellaridan biri qo'llaniladi.

⁴ Standart Styudent-t taqsimoti quyidagi ko'rinishdagi ehtimollik zichlik funksiyasiga ega bo'ladi:

$$t_v(x) = \frac{G\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} G\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

$$v = t - 1$$

$$G(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Bu yerda,

$t_v(x)$ – ehtimollik zichlik funksiyasi;

v – erkinlik darajasi;

t – namuna hajmi;

$G(p)$ – Gamma funksiyasi.

Avtoregressiv (Autoregressive, AR) model – bu vaqt qatorining joriy qiymatini uning o‘tgan davrdagi qiymatlari yordamida tushuntiruvchi statistik model hisoblanadi. AR modeliga kechikkan tasodifiy xatoliklarni (ε_{t-j}) qo‘shish orqali avtoregressiv harakatlanuvchi o‘rtacha (ARMA) modeli hosil qilinadi. Vaqt qatorining ARMA(r,s) tasviri quyidagicha ifodalanadi:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^r \varphi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^s \gamma_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Bu yerda,

y_t – ma’lumotlarning i davrdagi qiymati;

c – o‘zgarmas son;

y_{t-i} – ma’lumotlarning i davr oldingi davrdagi qiymatlari;

ε_{t-j} – tasodifiy xatoliklarning j davr oldingi davrdagi qiymatlari;

φ_i, γ_j – noma’lum koefitsiyentlar.

Ko‘pgina moliyaviy vaqt qatorlarining tarixiy dispersiyasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarish xususiyatiga ega. Ya’ni, ushbu ko‘rsatkichlarda vaqt o‘tishi bilan o‘zgaruvchan shartli heteroskedastiklik⁵ kuzatiladi.

Umumlashtirilgan avtoregressiv shartli heteroskedastiklik (GARCH) modeli esa, moliyaviy vaqt qatorlarining o‘zgaruvchan xususiyatlarini aniqlash usuli hisoblanadi. GARCH modelida musbat va manfiy tasodifiy xatoliklar dispersiyaga simmetrik ta’sir qiladi. Bunda, GARCH(p,q) modelining shartli dispersiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

$$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$$

Bu yerda,

ε_{t-i} – i davr oldingi davrlardagi tasodifiy xatoliklar;

σ_{t-j}^2 – j davr oldingi davrlardagi shartli dispersiyalar;

⁵ Heteroskedastiklik – bu tasodifiy o‘zgaruvchilar ketma-ketligining dispersiyasi vaqt qatorining turli nuqtalarida bir xil bo‘lmay, o‘zgarib turadigan holatdir.

$\omega, \alpha_i, \beta_j$ – koeffitsiyentlar.

Yuqoridagi tenglikdagi koeffitsiyentlarning barchasi nomanfiy deb qabul qilinishi manfiy bo‘lmagan dispersiyani ta’minlash uchun zarur. Shartli dispersiya tenglamasidagi α_i koeffitsiyenti oldingi davrdagi tasodifiy xatoliklar shartli dispersiyaga qanchalik ta’sir qilishini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, β_j koeffitsiyenti shartli dispersiyaning barqarorlik darajasini ko‘rsatadi.

GARCH modellarida eng keng tarqalgan yondashuv faqat birinchi tartibli tasodifiy xatoliklar va shartli dispersiya kechikishlaridan foydalanish hisoblanadi. Standart GARCH(1,1) modeli quyidagicha ifodalanadi:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

Bundan tashqari, integratsiyalangan GARCH (Integrated GARCH) modeli standart GARCH modeliga o‘xshash bo‘lib, musbat va manfiy tasodifiy xatoliklar dispersiyaga simmetrik ta’sir qiladi. GARCH modeli bilan farqi shundaki, IGARCH modelida α_i va β_j koeffitsiyentlarining yig‘indisi birga teng:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$
$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$$

Bu yerda,

$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$;

ε_{t-i} – i davr oldingi davrlardagi tasodifiy xatoliklar;

σ_{t-j}^2 – j davr oldingi davrlardagi shartli dispersiyalar.

GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan and Runkle GARCH) modeli asimmetrik GARCH modeli bo‘lib, manfiy tasodifiy xatoliklar musbat tasodifiy xatoliklarga qaraganda shartli dispersiyaga ko‘proq ta’sir qiladi. GJR-GARCH(p,q) modelining shartli dispersiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, & \text{agar } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, & \text{agar } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

Bu yerda,

$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, \beta_j \geq 0;$

$\varepsilon_{t-i} - i$ davr oldingi davrlardagi tasodifiy xatoliklar;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ davr oldingi davrlardagi shartli dispersiyalar.

Ekspontensial GARCH (Exponential GARCH) modeli keng qo'llaniladigan asimmetrik GARCH modellaridan biri bo'lib, shartli dispersiyani logarifmik ko'rinishda modellashtiradi. EGARCH(p,q) modeli quyidagicha ifodalanadi:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i |\varepsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

Bu yerda,

$\varepsilon_{t-j} - i$ davr oldingi davrdagi tasodifiy xatoliklar;

$\sigma_{t-j}^2 - j$ davr oldingi davrlardagi shartli dispersiyalar.

Dastlab yuqorida keltirilgan $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ ushbu tenglikdagi ε_t ni o'rniga qo'yish yordamida EGARCH(p,q) modelini quyidagicha yozish mumkin:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i z_{t-i} + \gamma_i |z_{t-i}|) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

Bu yerda, α_i va β_j larga hech qanday cheklovlar qo'yilmaydi va γ musbatligi talab qilinadi. Shartli dispersiya logarifmiga musbat tasodifiy xatolikning ta'siri ($\alpha_i + \gamma_i$) va salbiy tasodifiy xatolikning ta'siri ($\alpha_i - \gamma_i$) ko'rinishda bo'ladi.

Darajali GARCH (Power GARCH) modeli asimmetrik GARCH modellaridan bo'lib, shartli dispersiyani δ darajali shaklda modellashtiradi. PGARCH(p,q) modelining shartli dispersiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

Bu yerda,

$\omega > 0, \alpha_i \geq 0, -1 < \gamma_i < 1, \beta_j \geq 0, \delta > 0;$
 $\varepsilon_{t-i} - i$ davr oldingi davrlardagi tasodifiy xatoliklar;
 σ_{t-j} – oldingi davrlardagi shartli standart og‘ishlar.

Yuqorida keltirilgan barcha ARMA-GARCH modellari kombinatsiyasi maksimal ehtimollik⁶ funksiyasi yordamida baholanadi. Maksimal ehtimollik funksiyasi shakli GARCH modellarining parametrik tuzilishiga bog‘liq.

EVT kamdan-kam uchraydigan hodisalarni tahlil qilish uchun asosiy vositadir. Ko‘plab parametrik yondashuvlar vaqt qatorlarini modellashtirishda normal taqsimotga yaqinlashuvdan foydalanadi. Biroq, moliyaviy ma’lumotlardagi ekstremal qiymatlarni bunday usul bilan modellashtirishning kamchiligi shundaki, normal taqsimot ekstremal hodisalar ehtimolini kam baholaydi. EVTni modellashtirishda katta yo‘qotishlarning kichik namunasiga tayangan holda faqat taqsimotning ekstremal qiymatlariga e’tibor beriladi. Bu yondashuv, an’anaviy modellashtirish yondashuvlaridan farqli o‘laroq, butun taqsimotni emas, faqat ekstremal qiymatlarni modellashtirishga qaratilgan. Shu tariqa EVT yondashuvi ma’lumotlar qatorining ekstremal qiymatlarini modellashtirish orqali yuqoridagi muammolarni bartaraf etishga harakat qiladi.

Ekstremal qiymatlar nazariyasida katta yo‘qotishlar ma’lum bir chegaradan oshib ketuvchi kuzatuvlar sifatida qaraladi. Agar, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ ketma-ketlik F taqsimot funksiyasiga ega bo‘lgan mustaqil va bir xil taqsimlangan ma’lumotlar ketma-ketligi, u tanlangan chegara qiymati bo‘lgan holatda, y tanlangan chegaradan oshgan qiymatlarni bildirsa shartli taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F_u(y) = p(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Bu yerda, $x - u = y$ va $y > 0$.

Agar chegara yetarlicha yuqori qiymatga ega bo‘lsa, shartli taqsimot funksiyasi $F_u(y)$ umumlashgan Pareto taqsimotiga (Generalized Pareto Distribution, GPD) yaqinlashadi, ya’ni $F_u(y) \approx G_{\xi, \eta}(y)$. GPD quyidagi tarzda aniqlanadi:

⁶ Maksimal ehtimollik bahosi – bu kuzatilgan ma’lumotlar asosida tuzilgan ehtimollik funksiyasini maksimallashtirish orqali model parametrlarini baholash usuli.

$$G_{\xi,\eta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\eta}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

Bu yerda,

ξ – shakl parametri (shape parameter);

η – masshtab parametri (scale parameter).

Chegara qiymatini tanlash masalasi chegaradan oshgan qiymatlar yondashuvida muhim ahamiyatga ega. Shu sababli ushbu tadqiqotda chegara sifatida yo‘qotishlar taqsimotining 85-95% darajadagi kvantillari orasidagi qiymatlar qarab chiqiladi. Har bir tanlangan chegara uchun GPD taqsimoti modellarga alohida moslashtiriladi va modelning mosligi Anderson-Darling (AD⁷) hamda Cramer-von Mises (CvM) testlari yordamida baholanadi. Shuningdek, har bir holatda GPD parametrlarining (ξ va η) statistik ahamiyatliligi ham tahlil qilinib, optimal chegara tanlanadi.

$F(u)$ va $G_{\xi,\eta}(y)$ lar birlashtirilib, $x > u$ uchun umumiy taqsimot funksiya quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi,\eta}(y) + F(u) \approx 1 - \frac{k}{T} \left(1 + \frac{\xi(x - u)}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Bu yerda,

k – chegaradan oshgan kuzatuvlar soni;

T – umumiy namuna hajmi.

GPD parametrlari maksimal ehtimollik usuli yordamida baholanadi. Taqsimot $F(x)$ uchun oldindan belgilangan ishonch darajasidagi maksimal yo‘qotishi (Value at Risk, VaR) qiymati quyidagicha baholanadi:

$$VaR_q^{EVT} = u + \frac{\eta}{\xi} \left[\left(\frac{T(1 - q)}{k} \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

⁷ Nemukula, M., & Sigauke, C. (2020). A Point Process Characterisation of Extreme Temperatures: an Application to South African Data. Springer.

Bu yerda,

u – chegara qiymati;

η – GPD ning masshtab parametri (scale parameter);

ξ – GPD ning shakl parametri (shape parameter);

T – umumiy namuna hajmi;

q – ishonch darajasi;

k – chegaradan oshgan kuzatuvlar soni.

Yuqoridagi ifoda standartlashtirilgan qoldiqlar (z) uchun $VaR(95)$ qiymatini baholaydi. Dinamik o‘zgaruvchanlik modeli doirasida manfiy o‘zgaruvchanlik qiymatlari quyidagicha ifodalanadi:

$$VaR_{q,t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR_q^{EVT}$$

Bu yerda, μ_{t+1} va σ_{t+1} ARMA-GARCH modeli asosida baholangan qiymatlar. Baholangan VaR_q^{EVT} qiymatidan oshgan yo‘qotishlarning o‘rtacha qiymati (Expected Shortfall, ES) quyidagicha baholanadi:

$$ES_q^{EVT} = \frac{VaR_q^{EVT}}{1 - \xi} + \frac{\eta - \xi u}{1 - \xi}.$$

Dinamik o‘zgaruvchanlik modeli doirasida ES qiymati quyidagicha ifodalanadi:

$$ES_{q,t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} ES_q^{EVT}.$$

Ushbu yakuniy formula yordamida $t + 1$ davr uchun milliy valyuta kursi manfiy logarifmik o‘zgaruvchanligining ekstremal qiymatlardagi prognozi baholanadi.

Baholangan ekstremal qiymatlardagi valyuta kursi o‘zgaruvchanligi ta’sirida banklar balansida o‘zgarishlar yuzaga keladi. Milliy valyuta kursining qadrsizlanishi hisobiga banklarning xorijiy valyutadagi aktivlari xorijiy valyutadagi majburiyatlaridan yuqori bo‘lgan banklarda uzun valyuta mavqei oshadi. Aksincha, xorijiy valyutadagi aktivlari xorijiy valyutadagi majburiyatlaridan past bo‘lgan banklar qisqa valyuta pozitsiyasida ortish kuzatiladi.

Milliy valyuta kursining qadrsizlanishi hisobiga banklar aktivlari va majburiyatlari o‘rtasidagi miqdori bankning kapital qiymatidan oshib ketgan taqdirda bank defolt holatiga uchragan deb qaraladi. Bank defolt bo‘lgan taqdirda, banklararo

bog'liqlik hisobiga tarqalish xatari yuzaga keladi. Defoltga uchragan bankning o'z oldidagi majburiyatlarini qisman yoki to'liq bajara olmasligi oqibatida, mazkur bankka nisbatan kreditor mavqeida turgan banklarning aktivlari qiymati kamayadi. Bu esa banklararo tarqalish xatari tufayli kreditor banklarda kredit yo'qotishlari yuzaga kelishi mumkinligini anglatadi.

Banklararo tarqalish xatarini aniqlash uchun banklararo majburiyatlar matritsasidan foydalaniladi. Agar bank tizimida bir-biriga kredit berishi yoki depozit joylashtirishi mumkin bo'lgan N ta bank bo'lsa, banklararo majburiyatlar $(N \times N)$ matritsasi quyidagicha ifodalanadi:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & x_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{Ni} & \cdots & x_{Nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yerda,

x_{ij} – j bankning i bank oldidagi majburiyatlarini ifodalaydi;

$\sum_j x_{ij}$ – i bankning boshqa banklardan olinishi lozim bo'lgan umumiy mablag'larini ifodalaydi;

$\sum_i x_{ij}$ – j bankning boshqa banklar oldidagi umumiy majburiyatlarini ifodalaydi.

Ushbu model ma'lumotlarga qo'llanildi va tahlil jarayonida ikki turdagi tanlov amalga oshirildi. Birinchi bosqichda besh xil GARCH modellarining ichida parametrlarning statistik ahamiyatliligi hamda modellarning ma'lumotlarga mosligi AIC (Akaike Information Criterion) va BIC (Bayesian Information Criterion) orqali baholandi. Qiyosiy tahlil natijalariga ko'ra, EGARCH modeli ma'lumotlarga eng yaxshi moslashgan model sifatida tanlab olindi.

Ikkinchi bosqichda standartlashtirilgan qoldiqlar uchun optimal chegara aniqlandi. Eng yaxshi moslikni ta'minlovchi chegara sifatida 92 foizli kvantil tanlab olindi. Ushbu chegaradan oshgan qiymatlar uchun GPD taqsimot parametrlari statistik jihatdan ahamiyatli ekanligi hamda GPD modelini modellashtirishda taqsimotning mosligi AD va CvM testlari orqali belgilandi.