Ўзбекистон Республикаси
Марказий банки

Қисқа муддатли инфляция прогнозлари: вектор авторегрессив моделини Байес усулида баҳолашнинг батафсил баёни (BVAR)

Июль, 2021 йил

Мундарижа

I. Тадқиқотнинг долзарблиги

Инфляцион таргетлаш режимини самарали амалга ошириш учун пул-кредит сиёсати бўйича қарорлар келгуси 2-3 квартал учун қисқа муддатли прогнозлардан келиб чиқадиган ўрта муддатли инфляция прогнози асосида қабул қилинади.

Бугунги кунда Ўзбекистон Марказий банкида қуйидаги прогноз моделларидан олинган қисқа муддатли инфляция прогнозлари қўлланилади:

ARIMA (*ингл.* autoregressive integrated moving average) – яхлит сузувчи ўртача авторегрессион модели;

DFM (*ингл.* dynamic factor model) – динамик омиллар модели;

FAVAR (*ингл.* factor augmented vector autoregressive) – кенгайтирилган омиллар векторли авторегрессив модели.

Ушбу моделлар қаторига ҳозирда такомиллаштирилаётган ва ишлаб чиқиш босқичида бўлган **BVAR** ва **SVAR** қисқа муддатли прогноз моделларини қўшиш кўзда тутилган.

Юқоридаги ёндашувларнинг ҳар бири ўз афзалликлари ва камчиликларига эга бўлиб, улар бир-бирини тўлдиради.

Амалда иқтисодиётда ҳақиқий ва келажакдаги тенденцияларни тўлиқ ва аниқ тасвирлайдиган мукаммал моделни топиш қийин, шунинг учун прогнозларнинг максимал аниқлигини таъминлаш учун кўпчилик марказий банклар бир вақтнинг ўзида бир нечта моделлардан фойдаланади.

Масалан, **Норвегия Марказий банки** инфляцияни қисқа муддатли прогнози учун турли VAR, AR, хатоларни тузатиш векторли модели (VECM) ва омилли моделлардан фойдаланади (Aastveit, Gerdrup и Jore, 2011). Шу билан бирга, инфляцияни қисқа муддатли прогноз қилиш учун моделларни танлашнинг асосий мезони уларнинг реал маълумотларга мос келиш даражаси ҳамда намунадан ташқари прогнозларнинг аниқлиги ҳисобланади.

Россия банки қисқа муддатли инфляцияни прогноз қилишнинг комбинацияланган усулини қўллайди[1]. Бу эса кўпроқ маълумотлардан фойдаланиш имконини беради. Шундай қилиб, ИНИ (истеъмол нархлари индекси)нинг ҳар бир субиндекси учун прогнозлар турли моделлар (VAR, BVAR[2], RW, LSTAR, UC) ёрдамида амалга оширилади ва моделларнинг ҳар бири инфляциянинг ўзига хос умумлашган прогнозини беради. Сўнгра якуний инфляция прогнозини олиш учун турли моделлардан олинган прогнозлар уларнинг аниқлигига мутаносиб вазн билан жамланади.

Қисқа муддатли прогнозлаш моделлари орасида **Вектор авторегрессив моделини Байес усулида баҳолаш (BVAR)** инфляцияни прогноз қилишда кенг қўлланиладиган воситадир.

Мисол учун, **Туркия Республикаси Марказий банки** томонидан ўтказилган тадқиқотда BVAR ёрдамида инфляцияни прогнозлаш самарадорлиги муқобил таснифларга кўра баҳоланди. Натижаларга кўра, ўзгарувчилардан логарифмик айирма кўринишида фойдаланилганда BVAR аниқроқ прогнозларни беради[3]. Бунда ўзгарувчилар сифатида нефть нархи, импорт товарлари нархи, валюта курси, ишлаб чиқариш тафовути, ишчи кучига қилинган реал харажатлар, инфляцион кутилмалар ва ИНИ танлаб олинган.

Шу билан бирга, **Албания Марказий банки тадқиқот бўлими** BVAR ва VAR моделларининг қиёсий таҳлили келтирилган ишчи ҳужжат[4] чоп этди. Таҳлил натижалари шуни кўрсатдики, BVAR кўпроқ эндоген (эрксиз) ўзгарувчиларни қамраб олиш имконини беради ва стандарт VAR моделига хос бўлган "ортиқча параметрлаш" ("оверфиттинг") муаммоларини ҳал қилади.

---

[1] Прогнозирование инфляции методом комбинирования прогнозов в Банке России. Серия докладов об экономических исследованиях. Август 2016. Андрей Андреев.

[2] Моделирование Российской экономики с помощью BVAR. Гайдаровский форум. 2018. Ломиворотов Родион.

[3] A Bayesian VAR Approach to Short-Term Inflation Forecasting. Central Bank of the Republic of Turkey 2019.

[4] Forecasting the Albanian short-term inflation through a Bayesian VAR model. Bank of Albania 2019.

Шундай қилиб, қисқа муддатли прогнозлаш инструментлари қатори BVAR модели билан кенгайтирилиши, инфляцияни ҳар томонлама таҳлил қилиш ҳамда Марказий банк прогноз салоҳиятини мустаҳкамлаш имконини беради.

II. Моделга кириш

BVAR (Байес вектор авторегрессияси) вектор авторегрессиясини (VAR) баҳолаш учун байес усулидан фойдаланади. BVAR модели моҳиятини чуқур тушуниш учун бирламчи бўлган VAR моделини ўрганиш керак бўлади.

Векторли авторегрессия (VAR) бир қанча ўзгарувчи миқдорлар ўртасидаги боғликни уларнинг вақт давомида ўзгариши орқали аниқлаш учун фойдаланиладиган статистик моделдир. VAR кўп ўзгарувчили вақт қаторларини қамраб олгани учун битта эрксиз ўзгарувчили авторегрессия (AR) моделининг умумлашмаси ҳисобланади. Авторегрессия моделида бўлгани каби, ҳар бир ўзгарувчи учун унинг вақт давомида шаклланишини моделлаштирувчи тенглама мавжуд бўлади. Бу тенглама мазкур ўзгарувчининг олдинги қийматлари (лаглари[5]), моделдаги бошқа ўзгарувчиларнинг лаглари ва хатоликлардан ташкил топади.

Масалан, икки ўзгарувчининг – инфляция (π) ва валюта курси (s) ўзаро боғлиқлигини бир лаг билан баҳолаш учун қуйидаги тенгламалар системаси ёзилади:

$$\begin{cases} \pi_t = c_1 + a_{1,1} \cdot \pi_{t-1} + a_{1,2} \cdot s_{t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ s_t = c_2 + a_{2,1} \cdot \pi_{t-1} + a_{2,2} \cdot s_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{cases}$$

бунда, t – вақт даври, c_i - ўзгармас (intercept), $a_{i,j}$ – модель параметрлари, $\varepsilon_{i,t}$ - хатоликлар (error terms).

[5] Лаг (*ингл. “lag” – “кечикиш”*) – даврий кўрсаткич бўлиб, бир ҳодисанинг вақт оралиғида кечикиши ёки олдинлаб кетишини кўрсатади. Масалан, агар жорий инфляция даражасини π_t деб белгиласак, бир йил олдинги инфляцияни π_{t-1} деб белгилаймиз.

Юқоридаги тенгламалар системасини матрицалар устида амаллардан фойдаланиб[6], битта тенгламага айлантириш мумкин:

$$\begin{pmatrix} \pi_t \\ s_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{t-1} \\ s_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$Y_t = \begin{pmatrix} \pi_t \\ s_t \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}.$$

У ҳолда, (1) тенгламани чизиқли тенглама кўринишида ёзишимиз мумкин:

$$Y_t = c + A \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t \, .$$

Бу биринчи тартибли векторли авторегрессия модели ҳисобланади. Ушбу модель яна бошқа ўзгарувчилар ва уларнинг лаглари билан тўлдирилиши мумкин.

Мисол учун, n та эрксиз (эндоген), d та эркли (экзоген) ўзгарувчилардан иборат бўлган ва лаглар сони p га тенг бўлган VAR модели қуйидаги **умумий шаклда** ифодаланади:

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \cdots + A_p Y_{t-p} + D z_t + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \ldots, S. \tag{2}$$

бунда

Y_t – ўлчами $n \times 1$ бўлган эрксиз ўзгарувчиларнинг t-даврдаги қийматлари вектори,

Y_{t-i} шаклидаги ўзгарувчилар Y_t нинг i давр олдинги қийматлари ва “i-лаг” деб аталади $(i = 1, \ldots, p)$,

z_t – ўлчами $d \times 1$ бўлган эркли ўзгарувчиларнинг t-даврдаги қийматлари вектори,

A_i ва D матрицалар ўлчамлари мос равишда $n \times n$ ва $n \times d$ бўлган параметрлар матрицаси,

S – маълумот бўйича кузатувлар сони.

[6] *Қаранг:* 1-илова 6-8-таърифлар.

Қулайлик учун $T = S - p$ каби белгилаш киритамиз.

Мазкур тенгламанинг **матрицавий кўриниши** *(экзоген ўзгарувчиларсиз кўриниши)*:

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1}^1 & a_{1,2}^1 & \cdots & a_{1,n}^1 \\ a_{2,1}^1 & a_{2,2}^1 & \cdots & a_{2,n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^1 & a_{n,2}^1 & \cdots & a_{n,n}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ \vdots \\ y_{n,t-1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1,1}^p & a_{1,2}^p & \cdots & a_{1,n}^p \\ a_{2,1}^p & a_{2,2}^p & \cdots & a_{2,n}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^p & a_{n,2}^p & \cdots & a_{n,n}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \\ \vdots \\ y_{n,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,t} \end{pmatrix}.$$

Алоҳида-алоҳида **регрессия тенгламалари** шаклида ёзилса *(экзоген ўзгарувчиларсиз кўриниши)*:

$$\begin{gathered} y_{1,t} = c_1 + a_{1,1}^1 y_{1,t-1} + a_{1,2}^1 y_{2,t-1} + \cdots + a_{1,n}^1 y_{n,t-1} + \cdots + a_{1,1}^p y_{1,t-p} + a_{1,2}^p y_{2,t-p} + \cdots + a_{1,n}^p y_{n,t-p} + \varepsilon_{1,t} \\ y_{2,t} = c_2 + a_{2,1}^1 y_{1,t-1} + a_{2,2}^1 y_{2,t-1} + \cdots + a_{2,n}^1 y_{n,t-1} + \cdots + a_{2,1}^p y_{1,t-p} + a_{2,2}^p y_{2,t-p} + \cdots + a_{2,n}^p y_{n,t-p} + \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} = c_n + a_{n,1}^1 y_{1,t-1} + a_{n,2}^1 y_{2,t-1} + \cdots + a_{n,n}^1 y_{n,t-1} + \cdots + a_{n,1}^p y_{1,t-p} + a_{n,2}^p y_{2,t-p} + \cdots + a_{n,n}^p y_{n,t-p} + \varepsilon_{n,t}. \end{gathered}$$

(2) тенглама янада ихчам кўринишда ёзилса:

$$\boxed{Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t} \tag{3}$$

бу ерда[7]:

$X_t = W_{t-1} \otimes I_n$ ва унинг ўлчами $n \times [n(np + d + 1)]$,

$W_{t-1} = \begin{pmatrix} 1 & Y_{t-1}' & Y_{t-2}' & \cdots & Y_{t-p}' & z_t' \end{pmatrix}$ ва унинг ўлчами $1 \times [np+d+1]$,

$\beta = \mathrm{vec}(c,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_p,\ D)$ ва унинг ўлчами $[n(np + d + 1)] \times 1$.

Моделнинг номаълум параметрлари β — коэффицентлар вектори ва Σ — Y_t нинг ковариация матрицаси[8].

Ушбу модель Кристофер Симс томонидан тенгламалар системаларига муқобил равишда таклиф қилинган. Доим эркли ўзгарувчиси мавжуд бўлган стандарт регрессия моделидан фарқли ўлароқ, VAR моделида барча ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ ҳисобланади. VARнинг устунлик жиҳати унинг оддийлиги ва маълумотларни бошқаришдаги мослашувчанлигидадир.

[7] *Қаранг:* 1-илова 10,11-таърифлар.

[8] *Қаранг:* 2-илова 17-таъриф.

VAR моделидаги хатоликлар вектори қуйидаги шартларни бажариши керак:

1. $E[\varepsilon_t] = 0$ — давр бўйича хатоликлар ўртачаси нолга тенг, ёки аниқроқ қилиб $E[\varepsilon_t|X_t] = 0$, яъни X_t нинг ихтиёрий қийматларида хатоликлар йиғиндиси ноллашиб кетади *(Strict exogeneity)*. Бошқача айтганда, эркли ўзгарувчи бўйича ҳар қандай даврдаги маълумотлар (X_t) хатоликлар ўртачаси ($E[\varepsilon_t]$) ҳақида ҳеч қандай маълумот бермайди. Бундан фойдаланиб, (3) тенгликнинг иккала томонидан ҳам математик кутилма олиб, қуйидаги муносабатга эга бўламиз (эътибор беринг, $X_t\beta$ ўзгармас миқдор, чунки ε_t тасодифий миқдор бўлганлиги сабабли Y_t эрксиз ўзгарувчи миқдор ε_t нинг қийматларига $X_t\beta$ ни қўшиш орқали ҳосил қилинган тасодифий миқдор бўлади[9]):

$$E[Y_t] = E[X_t\beta + \varepsilon_t] = X_t\beta + E[\varepsilon_t] = X_t\beta. \tag{4}$$

2. $E[\varepsilon_t\varepsilon_t'] = V[Y_t]$, яъни $\varepsilon_t\varepsilon_t'$ матрицанинг математик кутилмаси Y_t тасодифий векторнинг ковариация матрицаси бўлади, чунки (3) тенгламадан хатоликлар векторини топсак:

$$\varepsilon_t = Y_t - X_t\beta.$$

У ҳолда (4) ифода ва 2-илова 17-таъриф 1-хоссага кўра:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t\varepsilon_t'] &= E[(Y_t - X_t\beta)(Y_t - X_t\beta)'] \\ &= E[(Y_t - E[Y_t])(Y_t - E[Y_t])'] = V[Y_t] = \Sigma. \end{aligned}$$

Эслатиб ўтамиз, ҳар қандай ковариация матрицаси симметрик ва мусбат ярим аниқланган матрица[10] бўлади *(No perfect multicollinearity)*.

3. $E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-n}'] = 0$ — хатоликлар ўртасида корреляция мавжуд эмас, яъни $Cov(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t-n}) = 0$[11] *(No autocorrelation)*. Бошқача айтганда, битта

[9] *Батафсил маълумот учун қаранг:* http://web.stanford.edu/class/polisci100a/regress2. Section 3.

[10] *Қаранг:* 1-илова 16-таъриф ва 2-илова 17-таъриф 2-хоссалар.

[11] *Қаранг:* 2-илова 14-таъриф.

кузатув хатоликлари тўғрисидаги ахборот бошқа ихтиёрий кузатув хатоликлари тўғрисида ҳеч қандай маълумот бермайди.

Юқоридаги шартлар ва Марказий лимит теоремасига[12] биноан хатоликлар вектори қуйидаги параметрли кўп ўзгарувчили нормал тақсимот қонунига[13] бўйсунади:

$$\boxed{\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma).}$$

III. Ўзбекистон учун модель татбиқи ва прогнозлар

Маълумотлар тавсифи

Вектор авторегрессив моделини чораклик асосда қуриш учун 4 та макроиқтисодий кўрсаткичлардан эндоген ўзгарувчи сифатида фойдаланилди. Улар инфляция, ЯИМнинг реал ўсиши, банклараро ўртача тортилган депозит фоиз ставкаси ва сўмнинг АҚШ долларига нисбатан курсининг ўзгариши. Барча маълумотлар йиллик фоиз кўринишида. Маълумотлар 2010 йилнинг I чорагидан 2021 йилнинг I чорагига қадар бўлган даврни қамрайди. Маълумот манбалари Ўзбекистон Республикаси Давлат статистика қўмитаси ва Ўзбекистон Республикаси Марказий банки ҳисобланади.

VAR модели параметрларини баҳолаш[14]

Мазкур ишда барча ҳисоб-китоблар MATLAB® дастури ёрдамида амалга оширилди. Моделни тузишда VAR тартиби сифатида 5 та лаг олинди. Модель баҳоланишидан олдин, инфляция бўйича маълумотлар стандарт X13-ARIMA-SEATS усули ёрдамида мавсумийликдан тозаланди. Модель параметрлари Гиббс танланма ҳосил қилувчиси ёрдамида баҳоланиб, бунда модель коэффициентлари априор тақсимоти сифатида Миннесота априоридан фойдаланилди. Гиббс танланма ҳосил қилувчиси такрорланишлари сони 25000 тани ташкил

[12] *Қаранг:* 3-илова.

[13] *Қаранг:* 2-илова 18-таъриф.

[14] *Модель параметрларини баҳолаш методологияси кейинги бобларда ёритилган.*

этиб, бунда охирги 2500 такрорланиш натижаларидан модель параметрлари тақсимотини шакллантириш ва прогнозларни ҳосил қилиш учун фойдаланилди.

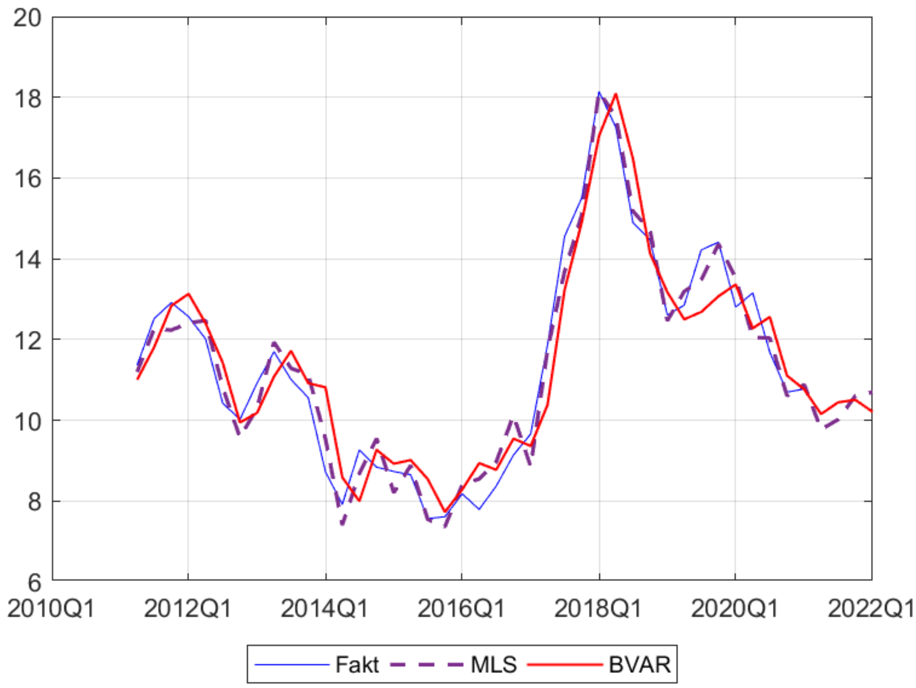
Натижалар

VAR моделини Байес усулида баҳолаш орқали инфляция учун қуйидаги прогноз траекторияси ҳосил қилинди.

Расм 1: Инфляция прогнози

Бунда 2021 йил охирига инфляция 9,7-10,6 фоиз бўлиши прогноз қилинмоқда.

Кейинги расмларда биз тузган VAR моделини баҳолашнинг классик усули бўлган кўп ўзгарувчили энг кичик квадратлар усули (Multivariate Least Squares – MLS) ва Байес усули (BVAR)да баҳоланганда натижаларнинг ҳақиқий маълумотларга (Fakt) қанчалик мос келиши (fitting) солиштирилган ва иккита усул ёрдамида қилинган прогнозлар кўрсатилган (BVAR учун прогнозлар медианаси олинди).



Расм 2: Баҳолашнинг классик ва Байес усули таққосламаси

Моделни такомиллаштириш истиқболлари

Тадқиқотнинг кейинги босқичларида модель параметрларини баҳолашда Миннесота априори билан бир қаторда ундан мураккаброқ ва мукаммалроқ Нормал тескари Уишарт (Normal inverse Wishart Prior) априоридан фойдаланиш кўзда тутилган, чунки у Миннесота априоридаги каби ковариация матрицасини ўзгармас ва диагонал бўлсин, деб фараз қилмасдан коэффициентлар ва ковариация матрицасининг апостериор тақсимотини аналитик йўл билан келтириб чиқариш имконини беради. Шундан сўнг эса эндоген ўзгарувчилар сонини кўпайтириш, импульс жавоб функциялари ҳосил қилиш ва дисперция декомпозицасини амалга ошириш кўзда тутилган.

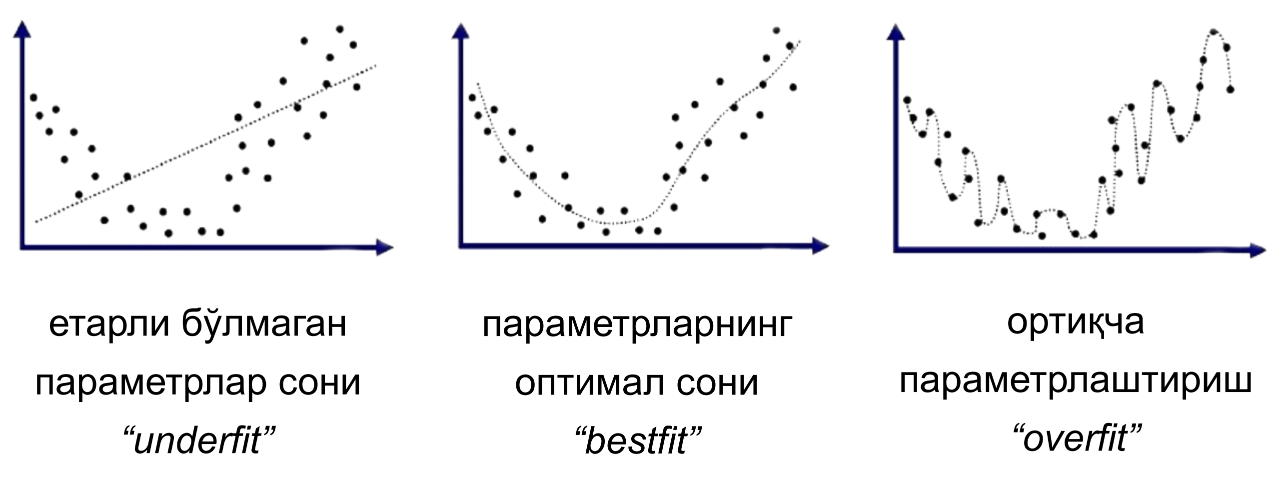
IV. Модель параметрларини баҳолаш масаласи

Модель параметри деб муайян бир омилнинг тегишли эрксиз ўзгарувчига таъсири даражасини кўрсатувчи ўзгармас сонга айтилади.

VAR модели параметрларини классик усулларда баҳолаш модель кўп сонли ўзгарувчилардан ташкил топганлиги учунгина маълумотга жуда яхши мос келадиган, аммо “оверфиттинг” (ортиқча параметрлаштириш) муаммоси сабабли аниқлиги паст бўлган параметр баҳоларини келтириб чиқариши мумкин.

Бунинг сабаби шундаки, ўзгарувчилар сони нисбатан кўп, моделни баҳолаш учун қаралаётган маълумотлар эса нисбатан кам бўлганда, айниқса баҳолаш усули (энг кичик квадратлар усули каби) маълумотга максимум даражада яқинлашадиган қилиб тузилган бўлса, параметр баҳолари шаклланишида “сигнал”дан кўра кўпроқ “шовқин”нинг таъсири бўлиши эҳтимоли катта. Шу орқали модель маълумотга деярли тўлиқ мос келса ҳам, унинг прогноз қилиш аниқлиги кескин пасаяди (Расм 3).

Бундай ҳолатда, параметрлар тўплами ўлчамини қисқартирадиган баъзи чекловлар қўйиш орқали бу каби моделларни баҳолаш тавсия этилади. Шундай экан, асосий масала **иложи борича ишончли чеклов мезонларини топиш** ҳисобланади.



Расм 3: **Параметрлар сони ошиб борган сари моделнинг эволюцияси**

VAR моделини Байес усулида баҳолаш дастлаб Литтермэн (1980) томонидан “оверфиттинг” муаммосига ечим сифатида ишлаб чиқилган. У таклиф қилган ечим баъзи коэффициентлар нолга тенг бўлиши каби аниқ чекловларни қўймасдан “оверфиттинг” муаммосини ҳал қилишга қаратилган. Параметрларга чеклов қўяётганда, баъзи коэффициентлар ноллигига тўлиқ ишонч ҳосил қилиб бўлмайди ва уларнинг эҳтимолий ўзгариш диапазонини эътибордан четга суриш мақсадга мувофиқ эмас. Байес нуқтаи назари мазкур ёндашувга айнан мос келади.

Параметрларнинг баъзи қийматларига ҳаддан ташқари юқори вазн бериш ўрнига, модель параметрларининг аниқ қийматлари бўйича ноаниқликларни параметрлар вектори учун **эҳтимоллик тақсимоти**[15] сифатида қаралиши мумкин. Мазкур тақсимот томонидан шаклланган ноаниқлик даражаси кейинчалик, агар дастлабки маълумот ва янгиланган маълумот ўртасида фарқ мавжуд бўлса, маълумотлар тўпламидаги ахборот орқали ўзгартирилиши мумкин. Токи дастлабки маълумот жудаям ноаниқ ёки ахборотдан ҳоли эмас экан, параметрлар баҳоси маълумотдаги “шовқин”дан кўра “сигнал” томонидангина ўзгартирилади, ва шу орқали “оверфиттинг” риски камаяди.

V. Байес усули татбиқи

Y тасодифий вектор бирор эҳтимоллик тақсимот қонуни бўйича берилган бўлсин. Бизни мавжуд маълумотлар асосида қуйидаги кўринишдаги **моделнинг параметларини баҳолаш масаласи** қизиқтиради:

$$Y \sim f(\theta|Y),$$

бу ерда f – бирор эҳтимоллик масса ёки зичлик функцияси[16], θ – тақсимот қонунининг баҳоланиши зарур бўлган параметрлари, масалан, f сифатида нормал тақсимот қонуни олинса, у ҳолда $\theta = \mu, \sigma^2$.

[15] *Қаранг:* 2-илова 8-таъриф.

[16] *Қаранг:* 2-илова 9,10-таърифлар.

Шуни таъкидлаш лозимки, биз қараётган масала одатий эҳтимоллик назарияси масалаларига тескари масала ҳисобланади.

Мисол учун, модель параметрлари (θ) берилганда Y нинг тақсимотини топиш талаб қилинадиган классик эҳтимоллар назарияси масалалари:

– ўйин карталари тўпламидан “туз”нинг тушиш эҳтимоли қанча?

– тангани 8 марта ташлаганда 6 марта “герб” томонининг тушиши эҳтимоли қандай?

Кинг (1998, 14) таъкидлаганидек, биз $P(Y|\textit{Модель})$ ёки $P(\textit{Маълумот}|\textit{Модель})$ ни аниқлаш мақсадида бўламиз. Бизнинг терминология бўйича эса $f(Y|\theta)$.

Аммо биз юқорида қараётган масалада бизда маълумот мавжуд, биз эса модель, аниқроғи, **моделнинг параметрлари**ни аниқлаш истагидамиз. Бошқача қилиб айтганда, биз маълумотларни шарт қилиб олиб, номаълум параметрлар тақсимотини аниқламоқчимиз, яъни $P(\textit{Модель}|\textit{Маълумот})$ ёки $f(\theta|Y)$. Бу “тескари эҳтимоллик масаласи” дейилади.

Мазкур масалани ечиш учун **Байес формуласи**дан[17] фойдаланишимиз мумкин:

$$P(\theta|Y) = \frac{P(\theta)P(Y|\theta)}{P(Y)},$$

бу ерда:

$P(\theta)$ – априор (синовдан олдинги) эҳтимоллик,

$P(\theta|Y)$ – апостериор (синовдан кейинги) эҳтимоллик ва

$P(Y|\theta)$ эса маълумот эҳтимоллиги (likelihood) дейилади.

Эътибор беринг, формула махражи, яъни $P(Y)$ шунчаки маълумотга боғлиқ функция. $P(\theta|Y)$ ва $P(Y|\theta)$ бир хил маълумот учун ҳисобланаётганлигини инобатга олсак, формула махражини ташлаб

[17] *Қаранг:* 2-илова 20-таъриф.

ёзишимиз мумкин ($\propto$ – пропорционаллик белгиси):

$$\boxed{P(\theta|Y) \propto P(\theta)P(Y|\theta)} \qquad (5)$$

бунда $\frac{1}{P(Y)}$ пропорционалик коэффициенти деб аталади.

(3) кўринишида берилган **VAR модели параметрларини Байес усулида баҳолаш, умуман олганда, қуйидаги 4 та қадамдан иборат:**

1. Баҳоланиши зарур бўлган параметрлар бўйича **дастлабки қараш шакллантирилади**. Мазкур дастлабки қараш, одатда, берилган маълумотлар — Y_t ва X_t дан келиб чиқмаган β ва Σ тўғрисидаги ахборотни ўзида акс эттиради. Бундай дастлабки қарашлар тадқиқотчининг ўтмишдаги тажрибаси ёки бошқа маълумотлар асосида ўтказилган изланишлар (шунга ўхшаш моделларни баҳолаш) асосида шакллантирилиши мумкин. Асосийси, ушбу дастлабки қарашлар **эҳтимоллик тақсимоти кўринишида** ифодаланади. Масалан, β коэффициентлар матрицаси бўйича дастлабки қарашларни $p(\beta) \sim N(\beta_0, \Omega)$ кўринишидаги тақсимот сифатида шакллантирилиб, бунда β элементлари тўғрисидаги жорий қарашларни β_0 ўзида жамлайди.
2. Y_t ва X_t бўйича статистик маълумотлар тўпланади ва **маълумот эҳтимоллиги функцияси** (likelihood function) ёзилади.
3. Биринчи қадамда шакллантирилган модель параметрлари тўғрисидаги **дастлабки қарашлар** иккинчи қадамдаги маълумот эҳтимоллиги функцияси ёрдамида **статистик ахборот билан янгиланади**. Бошқача айтганда, параметрларнинг априор тақсимоти $p(\beta, \Sigma)$ ва маълумот эҳтимоллиги функцияси $L(Y|\beta, \Sigma)$ (5)даги каби Байес формуласи ёрдамида бирлаштирилиб, параметрларнинг **апостериор тақсимоти** – $p(\beta, \Sigma|Y)$ га эга бўламиз:

$$p(\beta, \Sigma|Y) \propto p(\beta, \Sigma)L(Y|\beta, \Sigma). \qquad (6)$$

4. Апостериор тақсимот $p(\beta, \Sigma|Y)$ топилгандан сўнг, ундан β ва

Σ ларни ҳисоблаб чиқариш орқали мос равишда $p(\beta|Y)$ ва $p(\Sigma|Y)$ топилиши мумкин (бунда $p(\beta|Y)$ ва $p(\Sigma|Y)$ тақсимотлар маълумотга асосланган **маргинал тақсимотлар** дейилади). Ва ниҳоят, қидирилаётган параметрларнинг нуқтавий баҳосини (point estimate) ва аниқлик ўлчовларини ҳосил қилиш учун $p(\beta|Y)$ ва $p(\Sigma|Y)$ ларнинг мос математик кутилмаси ва дисперцияси осонликча таҳлил қилиниши мумкин. Лекин амалиётда кўпинча $p(\beta,\Sigma|Y)$ дан маргинал тақсимотларни аналитик жиҳатдан келтириб чиқарилиши жуда қийин ёки ҳатто имконсиз бўлиши мумкин. Бу муаммо эса Монте Карло симуляция усулларига[18] таянган сон орқали чиқариш йўли билан ҳал қилиниши мумкин.

Юқоридаги **ҳар бир қадамнинг татбиқини** кейинги бобларда батафсил кўриб чиқамиз.

1-қадамдаги априор тақсимотни шакллантириш **чуқур тизимли ёндашувни талаб қилгани** сабабли уни аниқлашни кейинги бобларга қолдириб, дастлаб 2-қадам, яъни **маълумот эҳтимоллиги (likelihood)нинг зичлик функциясини топиш масаласи**ни қарайлик. У одатда $L(Y|\theta)$ каби белгиланади.

(3) тенгламадан хатоликлар векторини топайлик:

$$\varepsilon_t = Y_t - X_t\beta.$$

VAR модели хатоликлар вектори учун қўйилган шартларга кўра ε_t вектор нормал тақсимот қонуни бўйича берилган:

$$\varepsilon_t \sim N(0,\Sigma).$$

Юқоридаги параметрлар асосида, битта t-даврдаги кузатув учун маълумот эҳтимоллиги зичлик функцияси:

$$L_t(Y|\beta,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(Y_t - X_t\beta)'\Sigma^{-1}(Y_t - X_t\beta)\right)$$

[18] *Қаранг:* 6-илова.

каби бўлади. Ҳар бир кузатув ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодиса[19] бўлгани сабабли бутун маълумотлар тўпламининг эҳтимоллиги:

$$\begin{aligned} L &= L_1 \times L_2 \times L_3 \times \cdots \times L_T = \prod_{t=1}^{T} L_t \\ &= \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y_t - X_t\beta)'\Sigma^{-1}(Y_t - X_t\beta)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(Tn)/2}|\Sigma|^{T/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - X_t\beta)'\Sigma^{-1}(Y_t - X_t\beta)\right) \\ &\propto |\Sigma|^{-T/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - X_t\beta)'\Sigma^{-1}(Y_t - X_t\beta)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Демак, модель параметлари асосида маълумотнинг эҳтимоллик зичлик функцияси:

$$\boxed{L(Y|\beta,\Sigma) \propto |\Sigma|^{-T/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - X_t\beta)'\Sigma^{-1}(Y_t - X_t\beta)\right).} \tag{8}$$

VI. Апостериор тақсимотни аниқлаш

(3) тенглама билан ишлашни қулайлаштириш мақсадида унинг m-тенгламаси учун даврдаги барча кузатувларни жамлаб, қуйидагича ёзамиз:

$$Y_m = X\beta_m + \varepsilon_m, \quad m = 1, \ldots, n \tag{9}$$

бу ерда

Y_m ва ε_m – ўлчами $T \times 1$ бўлган векторлар,

β_m – ўлчами $[np + d + 1] \times 1$ бўлган вектор,

X эса ўлчами $T \times [np + d + 1]$ бўлган матрица:

[19]*Қаранг:* 2-илова 19-таъриф.

$$
Y_m = \begin{pmatrix} y_{m,\,p+1} \\ y_{m,\,p+2} \\ \vdots \\ y_{m,S} \end{pmatrix}, \quad \beta_m = \begin{pmatrix} c_m \\ a^1_{m,1} \\ a^1_{m,2} \\ \vdots \\ a^1_{m,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a^p_{m,1} \\ a^p_{m,2} \\ \vdots \\ a^p_{m,n} \\ b_{m,1} \\ \vdots \\ b_{m,d} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_{1,p} & y_{1,p+1} & \cdots & y_{1,S-1} \\ y_{2,p} & y_{2,p+1} & \cdots & y_{2,S-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,p} & y_{n,p+1} & \cdots & y_{n,S-1} \\ y_{1,p-1} & y_{1,p-2} & \cdots & y_{1,S-2} \\ y_{2,p-1} & y_{2,p-2} & \cdots & y_{2,S-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,p-1} & y_{n,p-2} & \cdots & y_{n,S-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,S-p} \\ y_{2,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,S-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,S-p} \\ z_{1,p+1} & z_{1,p+2} & \cdots & z_{1,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{d,p+1} & z_{d,p+2} & \cdots & z_{d,S} \end{pmatrix}'.
$$

Биз модель параметрлари апостериор тақсимотини аниқлашни **учта ҳол учун** кўриб чиқамиз. Бунда ковариация матрицаси Σ ўзгармас ва диагонал матрица, яъни мос равишда

$$var[\varepsilon_i] = \sigma^2 \quad \text{— } \textit{Homoscedasticity}$$

ҳамда

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{— } \textit{No autocorrelation} \ (i \neq j)$$

деб фараз қилинади, яъни

$$\boxed{\Sigma = \sigma^2 I.} \tag{10}$$

Параметрларни баҳолашда дастлабки ҳолда σ^2 маълум деган фараз билан β нинг апостериор тақсимотини аниқлаймиз. Кейин эса

β маълум деган фараз билан σ^2 нинг апостериор тақсимотини аниқлаймиз, ва ниҳоят, охирги ҳолда иккала параметр ҳам номаълум бўлгандаги умумий ҳолни қараймиз.

1-ҳол. σ^2 **маълум деган фараз билан** β **нинг апостериор тақсимоти.** (9) тенгламанинг параметрларидан ташкил топган ўлчами $[np+d+1]\times 1$ бўлган β_m векторни баҳолаш масалани қарайлик (хатолик дисперцияси $\sigma^2_{m,m}=\sigma^2$ берилган, деган фараз билан).

Дастлаб β **тўғрисида бошланғич қарашлар**ни шакллантирамиз. Унинг априор тақсимоти нормал тақсимот қонуни бўйича берилган бўлсин:

$$\boxed{p(\beta_m)\sim N(\beta_0,\Omega)\propto|\Omega|^{-1/2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}(\beta_m-\beta_0)'\Omega^{-1}(\beta_m-\beta_0)\right)} \qquad (11)$$

бунда β_0 ва Ω лар β_m нинг мос равишда априор ўртачаси ва ковариация матрицасини билдиради.

Хатоликлар бир-бирига боғлиқмас [(10) ифода], деган фаразга таяниб, (8) ифодадаги каби **маълумот эҳтимоллиги** учун қуйидагига эга бўламиз:

$$L(Y|\beta,\sigma^2)\propto(\sigma^2)^{-T/2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_m-X\beta_m)'(Y_m-X\beta_m)\right). \qquad (12)$$

β **нинг апостериор тақсимоти** қуйидагича аниқланади:

$$\boxed{p(\beta_m|Y)=p(\beta_m)L(Y|\beta,\sigma^2),}$$

бу қуйидагига пропорционал:

$$(\sigma^2)^{-\frac{T}{2}}|\Omega|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\beta_m-\beta_0)'\Omega^{-1}(\beta_m-\beta_0)+\frac{1}{\sigma^2}(Y_m-X\beta_m)'(Y_m-X\beta_m)\right]\right\}$$
$$\propto\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\beta_m'\Omega^{-1}\beta_m-\beta_m'\Omega^{-1}\beta_0-\beta_0'\Omega^{-1}\beta_m+\beta_0'\Omega^{-1}\beta_0\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sigma^2}\left(Y_m'Y_m-Y_m'X\beta_m-\beta_m'X'Y_m+\beta_m'X'X\beta_m\right)\right]\right\} \qquad (13)$$

Охирги ифодадаги ковариация матрицаси Ω симметрик матрица (яъни $\Omega' = \Omega$) эканлигидан ҳамда тескари матрица хоссаларига кўра[20]:

$$(\Omega^{-1})' = (\Omega')^{-1} = (\Omega)^{-1} = \Omega^{-1},$$

яъни симметрик матрица тескариси ҳам симметрик матрицадир.

Шунингдек, $\beta'_m \Omega^{-1} \beta_0$ кўпайтманинг ўлчамини ҳисоблайлик $(k = np + d + 1)$:

$$\left[\beta'_m\right]_{1\times k} \cdot \left[\Omega^{-1}\right]_{k\times k} \cdot \left[\beta_0\right]_{k\times 1} = [\, c \,]_{1\times 1}.$$

Демак, кўпайтма натижаси ўлчами 1×1 бўлган матрица, ёки шунчаки скаляр ($c = conts$). Скалярнинг транспонирлангани яна скаляр бўлгани учун:

$$\beta'_m \Omega^{-1} \beta_0 = \left(\beta'_m \Omega^{-1} \beta_0\right)' = \beta'_0 \Omega^{-1} \beta_m. \tag{14}$$

Шу каби:

$$\left[\beta'_m\right]_{1\times k} \cdot \left[X'\right]_{k\times T} \cdot \left[Y_m\right]_{T\times 1} = [\, c \,]_{1\times 1}.$$

Демак,

$$\beta'_m X' Y_m = \left(\beta'_m X' Y_m\right)' = Y'_m X \beta_m. \tag{15}$$

У ҳолда (14) ва (15) тенгликлардан фойдаланиб, (13) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\beta'_m\Omega^{-1}\beta_m - 2\beta'_0\Omega^{-1}\beta_m + \beta'_0\Omega^{-1}\beta_0\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\sigma^2}\left(Y'_m Y_m - 2Y'_m X\beta_m + \beta'_m X' X\beta_m\right)\right]\right\}, \tag{16}$$

Бунда

$\left[Y'_m\right]_{1\times T} \cdot \left[Y_m\right]_{T\times 1} = [\, c \,]_{1\times 1}$ ва $\left[\beta'_0\right]_{1\times k} \cdot \left[\Omega^{-1}\right]_{k\times k} \cdot \left[\beta_0\right]_{k\times 1} = [\, c \,]_{1\times 1}$

кўпайтмалар β_m га нисбатан ўзгармас бўлгани учун (16) ифода қуйидагига пропорционал:

[20] *Қаранг:* 1-илова 9-таъриф

$$
\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\beta_m'\Omega^{-1}\beta_m - 2\beta_0'\Omega^{-1}\beta_m - 2\cdot\frac{1}{\sigma^2}Y_m'X\beta_m + \frac{1}{\sigma^2}\beta_m'X'X\beta_m\right]\right\}
$$
$$
= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\beta_m'\left(\Omega^{-1} + \frac{1}{\sigma^2}X'X\right)\beta_m - 2\left(\Omega^{-1}\beta_0 + \frac{1}{\sigma^2}X'Y_m\right)'\beta_m\right]\right\}. \quad (17)
$$

Қуйидагига эътибор қаратайлик (бу ерда A ва B ўлчами $k\times 1$ бўлган векторлар, C эса ўлчами $k\times k$ бўлган симметрик матрица бўлсин):

$$
\begin{aligned}
(A-B)'C^{-1}(A-B) &= A'C^{-1}A - B'C^{-1}A - A'C^{-1}B + B'C^{-1}B \\
&= A'C^{-1}A - 2B'C^{-1}A + B'C^{-1}B.
\end{aligned}
$$

Бундан фойдаланиб, (17) ифодада

$$
\begin{aligned}
A &= \beta_m\,, \\
C^{-1} &= \Omega^{-1} + \sigma^{-2}X'X, \\
B'C^{-1} &= \left(\Omega^{-1}\beta_0 + \sigma^{-2}X'Y_m\right)' = D'
\end{aligned}
$$

каби белгилашлар киритсак, у ҳолда тескари матрица хоссаларига кўра:

$$
C = (C^{-1})^{-1} = \left(\Omega^{-1} + \sigma^{-2}X'X\right)^{-1}
$$

ҳамда

$$
\begin{aligned}
&B'C^{-1} = D' \implies (B'C^{-1})' = (D')' \implies C^{-1}B = D \implies \\
&\implies CC^{-1}B = CD \implies B = CD = C\left(\Omega^{-1}\beta_0 + \sigma^{-2}X'Y_m\right).
\end{aligned}
$$

Демак, (17) ифодада экспонент функция аргументига скаляр бўлган $B'C^{-1}B$ ифодани қўшиб юбориш орқали қуйидагига эга бўламиз:

$$
\boxed{p(\beta_m|Y) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\beta_m - B\right)'C^{-1}\left(\beta_m - B\right)\right]\right\}} \quad (18)
$$

бунда

$$
\begin{aligned}
B &= C\left(\Omega^{-1}\beta_0 + \sigma^{-2}X'Y_m\right), \\
C &= \left(\Omega^{-1} + \sigma^{-2}X'X\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Эътибор беринг, (18) ифодадан маълум бўладики, модель параметрларининг апостериор тақсимоти бу математик кутилмаси B ва ковариация матрицаси C билан берилган кўп ўзгарувчили нормал тақсимот бўлади, яъни:

$$\boxed{p(\beta_m|Y) \sim N(B, C).}$$

Бошқача айтганда, Ω^{-1}, β_0 ва σ^{-2} маълум бўлганида, биз B векторни параметрларнинг нуқтавий баҳоси сифатида олишимиз мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, модель параметрларининг апостериор тақсимоти ўртачаси

$$B = \left(\Omega^{-1} + \sigma^{-2}X'X\right)^{-1}\left(\Omega^{-1}\beta_0 + \sigma^{-2}X'Y_m\right)$$

формуласидан априор параметрлар (яъни β_0 ва Ω^{-1}) олиб ташланса (априор тақсимот ўз ўртачаси атрофида чексиз дисперцияга эга, деган фараз қилинса: $\Omega^{-1} = 0$), апостериор ўртача энг кичик квадратлар усули (OLS) билан баҳоланган параметрлар векторига айланади:

$$B = (X'X)^{-1}X'Y_m.$$

Умуман олганда, агар $p(\theta|Y)$ апостериор тақсимот $p(\theta)$ априор тақсимот билан бир хил эҳтимоллик тақсимоти оиласига мансуб бўлса, улар **алоқадор тақсимотлар** (conjugate distributions) деб аталади, ва бунда априор тақсимот $p(Y|\theta)$ маълумот эҳтимоллиги функцияси учун **алоқадор априор** (conjugate prior) дейилади.

Юқорида (11) ва (12) ифодалардан (18) ифоданинг келиб чиқиши натижасида шу маълум бўлдики, нормал тақсимот функциялари оиласи маълумот эҳтимоллиги сифатида ҳам нормал тақсимот олинганда ўзига-ўзи алоқадор (self-conjugate) тақсимот бўлади, яъни априор тақсимот ва маълумот эҳтимоллиги функцияси нормал тақсимотлар бўлса, апостериор тақсимот ҳам албатта нормал тақсимот бўлади.

2-ҳол. β **маълум деган фараз билан** σ^2 **нинг апостериор тақсимоти.** Бунда ҳам юқоридаги каби учта босқичда σ^2 нинг шартли апостериор тақсимотини аниқлаймиз.

Дастлаб σ^2 **тўғрисида бошланғич қарашлар**ни шакллантирамиз. Бунда алоқадор тақсимотларга эришиш учун $\frac{1}{\sigma^2}$ нинг априор тақсимоти сифатида гамма тақсимотини[21] оламиз:

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \sim \Gamma\left(\frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2}\right) \propto \left[\frac{1}{\sigma^2}\right]^{\frac{T_0}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_0}{2\sigma^2}\right).$$

Маълумот эҳтимоллиги функцияси сифатида (12) ифодадан фойдаланамиз.

σ^2 **нинг апостериор тақсимотини ҳисоблаймиз**. Бунда юқоридаги босқичларда шакллантирилган $\frac{1}{\sigma^2}$ нинг априор тақсимоти ва маълумот эҳтимоллиги функциясидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|\beta, Y\right) &\propto p\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) L(Y|\beta,\sigma^2) \\ &= \left[\frac{1}{\sigma^2}\right]^{\frac{T_0}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_0}{2\sigma^2}\right) (\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{(Y_m - X\beta_m)'(Y_m - X\beta_m)}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{\sigma^2}\right]^{\frac{T_0}{2}-1+\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{\theta_0 + (Y_m - X\beta_m)'(Y_m - X\beta_m)}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Охирги ҳосил бўлган ифода қуйидаги параметрлар билан берилган гамма тақсимоти эканлигини пайқаш қийинмас:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{T_0 + T}{2}, \\ \theta_1 &= \frac{\theta_0 + (Y_m - X\beta_m)'(Y_m - X\beta_m)}{2}. \end{aligned}$$

Бундан

$$\boxed{p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|\beta, Y\right) \propto \Gamma(T_1, \theta_1).} \qquad (19)$$

[21] *Қаранг:* 4-илова 2-таъриф ва 3-хосса.

3-ҳол. σ^2 ва β нинг апостериор тақсимоти. Энди амалий жиҳатдан аҳамиятли бўлган ҳам β коэффициентлар вектори, ҳам $1/\sigma^2$ номаълум бўлган ҳолда уларнинг биргаликдаги апостериор тақсимотини ҳисоблашни кўрамиз. Буни худди юқоридаги каби учта босқичда амалга оширамиз.

Бошланғич қарашларни шакллантириш. Шартли эҳтимоллик[22] формуласидан фойдаланиб, априор тақсимотни шакллантирамиз:

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2}, \beta\right) = p\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot p\left(\beta \middle| \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

бу ерда

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \sim \Gamma\left(\frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2}\right) \propto \left[\frac{1}{\sigma^2}\right]^{\frac{T_0}{2}-1} \exp\left(-\frac{\theta_0}{2\sigma^2}\right),$$

$$p\left(\beta \middle| \frac{1}{\sigma^2}\right) \sim N(\beta_0, \sigma^2\Omega) \propto |\sigma^2\Omega|^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\beta_m - \beta_0)'(\sigma^2\Omega)^{-1}(\beta_m - \beta_0)\right).$$

Маълумот эҳтимоллиги функцияси сифатида яна (12) ифодадан фойдаланамиз.

Апостериор тақсимотни ҳисоблаш. Бунинг учун, одатдагидек, априор тақсимот ва маълумот эҳтимоллиги функциясидан фойдаланамиз:

$$\boxed{p\left(\frac{1}{\sigma^2}, \beta \middle| Y\right) \propto p\left(\frac{1}{\sigma^2}, \beta\right) \cdot L(Y|\beta, \sigma^2).} \tag{20}$$

Юқоридаги тақсимот β ва $1/\sigma^2$ нинг биргаликдаги тақсимот функцияси бўлиб, унинг шакли юқорида кўрсатилган 1-ҳол ва 2-ҳолдаги β ва $1/\sigma^2$ нинг алоҳида шартли апостериор тақсимот функцияларидан анча мураккаб. Кейинги қадамда (20) ифодадан бизга зарур бўлган β ва $1/\sigma^2$ нинг шартли апостериор тақсимот функцияларини “ажратиб” олиш керак.

[22] *Қаранг:* 2-илова 20-таъриф.

Умуман олганда, агар $f(x, y)$ функция X ва Y узлуксиз тасодифий миқдорларнинг $[a, b] \times [c, d]$ соҳадаги биргаликдаги эҳтимоллик зичлик функцияси бўлса, уларнинг алоҳида-алоҳида маргинал тақсимот зичлик функциялари қуйидаги интеграллар ёрдамида аниқланади[23]:

$$f_X(x) = \int_a^b f(x, y) dy, \qquad f_Y(y) = \int_c^d f(x, y) dx. \tag{21}$$

Шу каби, **назарий жиҳатдан**, (21)даги формулалардан фойдаланиб, (20)дан β ва $1/\sigma^2$ нинг шартли апостериор тақсимот функцияларини ҳисоблаб чиқариш мумкин:

$$p(\beta|Y) = \int_0^\infty p\left(\frac{1}{\sigma^2}, \beta \middle| Y\right) d\frac{1}{\sigma^2},$$

шунингдек,

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2} \middle| Y\right) = \int_0^\infty p\left(\frac{1}{\sigma^2}, \beta \middle| Y\right) d\beta.$$

Аммо олдин ҳам таъкидланганидек, **амалий жиҳатдан**, (20) каби параметрларнинг биргаликдаги апостериор тақсимоти жуда мураккаб кўринишга эга бўлганлиги сабабли уни аналитик йўл билан аниқлаш ва кейин маргинал тақсимотларни интеграллар ёрдамида ҳисоблаб чиқариш имконсиздир.

Шу ўринда, параметрларнинг апостериор тақсимотларини аниқлашнинг биз кўрган 1-3-ҳолларидан қуйидагича муҳим хулосалар қилиш мумкин:

– 1 ва 2-ҳоллардаги каби шартли апостериор тақсимотларни ҳисоблаб чиқариш ва улар билан ишлаш нисбатан осонроқ;

– аксинча, 3-ҳолда кўрсатилгани каби биргаликдаги тақсимотдан маргинал тақсимотларни ҳосил қилиш мураккаб моделларда қийин ёки имконсиз бўлган аналитик йўл билан чиқаришни талаб этади.

---

[23] *Батафсил маълумот учун қаранг:* https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/readings/MIT18_05S14_Reading7a.pdf, Sections 3.2 and 3.8.

VII. Гиббс танланма ҳосил қилувчиси

Олдинги бобдаги хулосамизга кўра, VAR модели параметрлари апостериор тақсимотини шакллантиришда улардан бирини маълум деб фараз қилиш амалий аҳамиятга эга. Буни амалга ошириш учун Марков занжири Монте Карло[24] алгоритмларидан бири бўлган Гиббс танланма ҳосил қилувчисидан (Gibbs sampler) фойдаланилади.

Бизни қизиқтираётган масалани яна бир бор эсга олсак: бизга параметрларнинг маълумотга асосланган апостериор тақсимоти зарур, яъни $p(\beta|Y)$ ва $p(\Sigma|Y)$. Аммо, юқорида 1 ва 2-ҳолларда кўрганимиз каби, уларнинг бирини аниқлаш учун иккинчисининг қийматини билиш зарур: $p(\beta|Y)$ ни аниқлаш учун σ^2 зарур ва $p(\frac{1}{\sigma^2}|Y)$ ни аниқлаш учун β керак.

Гиббс танланма ҳосил қилувчиси рекурсив Монте Карло усул бўлиб, у босқичма-босқич равишда бизга зарур тақсимотларни ҳосил қилади. Дастлаб $\beta^{(0)}$ ёки $\sigma^{2(0)}$ нинг ихтиёрий қийматларидан бошлаймиз ва уларнинг мос зичлик функцияларидан танланма ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 = \sigma^{2(0)} \\
&p\left(\beta|Y, \sigma^{2(0)}\right) \text{ дан } \beta^{(0)} \\
&p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|Y, \beta^{(0)}\right) \text{ дан } \sigma^{2(1)} \\
&p\left(\beta|Y, \sigma^{2(1)}\right) \text{ дан } \beta^{(1)} \\
&p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|Y, \beta^{(1)}\right) \text{ дан } \sigma^{2(2)} \\
&\vdots \\
&p\left(\beta|Y, \sigma^{2(k-1)}\right) \text{ дан } \beta^{(k)} \\
&p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|Y, \beta^{(k)}\right) \text{ дан } \sigma^{2(k)}.
\end{aligned}$$

[24] *Қаранг:* 5 ва 6 иловалар.

$\mathbf{v}^{(k)} = (\beta^{(k)}, \sigma^{2(k)})$ вектор Марков занжири ҳосил қилади ва етарлича катта сондаги такрорлашларда ундан олинган танланмалар ҳақиқий маргинал апостериор тақсимот билан тақрибан бир хил бўлади. Бошқача айтганда, юқоридаги каби танланма ҳосил қилиш жараёни M марта такрорланади ва охирги N та (масалан, $N = 1000$) танланма сақлаб қўйилади.

Қуйида (9) тенглама параметрлари апостериор тақсимотини Гиббс танланма ҳосил қилувчиси ёрдамида аниқлаш алгоритмини кўриб чиқамиз. Бу 4 та қадамда амалга оширилади.

1-қадам. Априор тақсимотлар ва бошланғич қийматлар белгиланади.

β учун нормал тақсимотни Миннесота априори параметрлари бўйича ўрнатамиз:

$$p(\beta_m) \sim N(\beta_0, \Omega).$$

Бошқача айтганда, β_m учун априор ўртача – β_0 ва априор ковариация матрицаси – Ω ни киритамиз.

$1/\sigma^2$ учун априор гамма тақсимотини T_0 ва θ_0 параметрлар бўйича ўрнатамиз:

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \sim \Gamma\left(\frac{T_0}{2}, \frac{\theta_0}{2}\right).$$

Гиббс танланма ҳосил қилувчисини бошлаш учун β_m ёки σ^2 нинг бири бўйича бошланғич қиймат зарур бўлади. Биз бу мисолда σ^2 учун бошланғич қиймат сифатида унинг OLS бўйича баҳосини оламиз, яъни

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2_{OLS} = \frac{\varepsilon'\varepsilon}{T - n}.$$

Шуни таъкидлаш зарурки, VAR каби чизиқли моделларда Гиббс такрорланишлари сони етарлича катта бўлганида параметрларнинг бошланғич қийматлари, амалий нуқтаи назардан, уларнинг якуний қийматлари ҳосил бўлишида кам аҳамиятга эга.

2-қадам. σ^2 маълум бўлгани сабабли β нинг апостериор тақсимотидан тасодифий сон ҳосил қиламиз. β нинг апостериор тақсимоти (18) ифодага кўра қуйидаги параметрли нормал тақсимот бўлади:

$$p(\beta_m|Y) \sim N(B, C),$$

бунда

$$\begin{aligned} B &= C\left(\Omega^{-1}\beta_0 + \sigma^{-2}X'Y_m\right), \\ C &= \left(\Omega^{-1} + \sigma^{-2}X'X\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Эътибор беринг, бизда B ва C параметрларни ҳисоблаш учун зарур бўлган барча компонентларнинг қийматлари мавжуд.

Энди $p(\beta_m|Y)$ тақсимотдан β_m тасодифий миқдорлар векторини ҳосил қиламиз. Бунинг учун қуйидаги алгоритмдан фойдаланамиз.

1-алгоритм. $N(\mu, \omega)$ тақсимотдан $r \times 1$ ўлчамли вектор (векторни z каби белгилайлик) ҳосил қилиш учун дастлаб, компьютер дастури ёрдамида стандарт нормал тақсимотдан $r \times 1$ ўлчамли z_0 вектор ҳосил қилинг. Мазкур стандарт нормал сонлар тасодифий миқдор стандартлаштириш амалига тескари бўлган қуйидаги алмаштириш ёрдамида ўртачаси μ ва дисперцияси ω бўлган z тасодифий миқдорга айлантирилади:

$$z = \mu + z_0 \cdot \omega^{1/2}.$$

Юқоридаги алгоритмдан фойдаланиб, $1 \times [np + d + 1]$ ўлчамли $\bar{\beta}$ стандарт нормал вектор ҳосил қиламиз ва бу орқали бизга зарур β нинг апостериор тақсимотидан тасодифий сон ҳосил қиламиз:

$$\beta_m^{(1)} = B + \left[\bar{\beta} \cdot C^{1/2}\right]'$$

бунда $\beta_m^{(1)}$ – 1-Гиббс такрорланишида ҳосил бўлган β_m векторни англатади.

3-қадам. $\beta^{(1)}$ маълум бўлгани сабабли $1/\sigma^2$ нинг апостериор тақсимотидан σ^2 ни ҳосил қиламиз. $1/\sigma^2$ нинг апостериор тақсимоти

(19) ифодага кўра қуйидаги параметрли гамма тақсимоти бўйича аниқланади:

$$p\left(\frac{1}{\sigma^2}\middle|\beta, Y\right) \propto \Gamma\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right).$$

бунда

$$\begin{aligned}
&T_1 = T_0 + T,\\
&\theta_1 = \theta_0 + \left(Y_m - X\beta_m^{(1)}\right)'\left(Y_m - X\beta_m^{(1)}\right).
\end{aligned}$$

Эътибор беринг, апостериор параметр θ_1 олдинги қадамда ҳосил қилинган $\beta_m^{(1)}$ дан фойдаланиб ҳисобланмоқда.

Энди $\Gamma\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right)$ тақсимотдан тасодифий $1/\sigma^2$ ни ҳосил қиламиз. Бунинг учун қуйидаги алгоритмдан фойдаланамиз.

2-алгоритм. $\frac{T}{2}$ эрклилик даражаси ва $\frac{\theta}{2}$ параметрли гамма тақсимотидан λ сонни ҳосил қилиш учун дастлаб, стандарт нормал тақсимотдан T та ҳосил қилинг ва уларни τ векторда жамланг:

$$\tau = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_T]'.$$

У ҳолда, хи-квадрат тақсимот хоссасига кўра[25]:

$$\tau'\tau = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_T^2 \sim \Gamma\left(\frac{T}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Бизга зарур λ сони эса, гамма тақсимоти хоссасидан[26] фойдаланган ҳолда:

$$\lambda = \frac{\tau'\tau}{\theta} \sim \Gamma\left(\frac{T}{2}, \frac{\theta}{2}\right).$$

Юқоридаги алгоритмдан фойдаланиб, $\Gamma\left(\frac{T_1}{2}, \frac{\theta_1}{2}\right)$ тақсимотдан λ сонни ҳосил қиламиз, у ҳолда:

$$\sigma^{2(1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

бунда $\sigma^{2(1)}$ – 1-Гиббс такрорланишида ҳосил бўлган σ^2 сонни англатади.

[25] *Қаранг:* 4-илова 3-хосса.

[26] *Қаранг:* 4-илова 2-хосса.

4-қадам. 2 ва 3-қадамларни k марта такрорлаш орқали $\beta_m^{(1)}, \beta_m^{(2)}, \ldots, \beta_m^{(k)}$ ва $\sigma^{2(1)}, \sigma^{2(2)}, \ldots, \sigma^{2(k)}$ қийматларга эга бўламиз. β_m ва σ^2 нинг охирги N та такрорланишда ҳосил бўлган қийматларидан мазкур параметрларнинг эмпирик тақсимоти тузилади. Ушбу эмпирик тақсимот тақрибан параметрларнинг ҳақиқий маргинал апостериор тақсимоти бўлиб ҳисобланади. Демак, уларнинг ўртачасидан β_m ва σ^2 нинг нуқтавий баҳоси сифатида фойдаланишимиз мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, дастлабки $k-N$ та такрорланишлар эмпирик тақсимотни ҳисоблашда инобатга олинмайди ва улар "ёнилғи" (burn-in) такрорланишлари деб аталади. Мазкур сондаги такрорланишлар Гиббс танланма ҳосил қилувчиси параметрларнинг ҳақиқий қийматига яқинлашишни бошлаши (convergence) учунгина зарурдир.

Ва ниҳоят, VAR моделининг барча параметрларини аниқлаб олганимиздан сўнг, улардан фойдаланиб рекурсив усул ёрдамида қаралаётган ўзгарувчилар учун **прогноз траекторияларини ҳосил қилишимиз мумкин** бўлади.

VIII. Миннесота априори

VAR моделини Байес усулида баҳолашдаги 1-қадам модель параметрлари учун априор тақсимот функцияси $p(\beta, \Sigma)$ ни аниқлаб олишдир. Бунда кенг фойдаланиладиган усуллардан бири Литтермэн (1986) томонидан таклиф қилинган, баъзан Миннесота априори деб аталувчи усулдир.

(18) формуладан фойдаланиш учун зарур бўлган априор тақсимотнинг ўртачаси ва ковариация матрицасини бўлган β_0 ва Ω ларни аниқлаш масаласини қарайлик.

Литтермэн макроиқтисодий вақт қаторларининг ўзига хос умумий учта хусусиятига таяниб, (11) ифодадаги каби ўзининг бошланғич (априор) тақсимотини шакллантиради:

1) макроиқтисодий кўрсаткичларга хос бўлган тренд асосида ўзгариш хусусияти;

2) маълумотнинг сўнгги даврдаги қийматлари жорий қиймати тўғрисида ўтмишдаги қийматлардан кўра кўпроқ ахборот беради;

3) қаралаётган ўзгарувчининг олдинги даврдаги қийматлари унинг жорий қиймати тўғрисида бошқа ўзгарувчининг олдинги даврдаги қийматлардан кўра кўпроқ ахборот беради.

Мазкур қонуниятлар параметрларга қуйидагича эҳтимоллик тақсимотини мос қўйиш орқали баҳолашда татбиқ қилиниши мумкин:

1) биринчи лагдан ташқари ҳамма лагларга ўрнатилган коэффициентларнинг ўртачаси нолга тенг;

2) коэффициентларнинг дисперцияси лаглар сони билан тескари боғлиқликда;

3) m-тенгламадаги j-ўзгарувчи коэффициентлари учун m-ўзгарувчига нисбатан пастроқ бошланғич дисперция ўрнатилади.

Юқоридаги талаблар параметрлардан ташкил топган вектор (гиперпараметр дейилади) орқали ифодаланиши мумкин. Хусусан, Литтермэн Ω ковариация матрицаси диагонал элементлари қуйидаги таркибдаги тасодифий миқдор, деб фараз қилади:

$$\left(\frac{\lambda_1}{l^{\lambda_3}}\right)^2 \text{ агар } m = j \text{ бўлса},$$

$$\left(\frac{\sigma_m \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_j l^{\lambda_3}}\right)^2 \text{ агар } m \neq j \text{ бўлса},$$

$$(\sigma_m \lambda_4)^2 \text{ ўзгармаслар учун}.$$

бунда m-тенгламадаги эрксиз ўзгарувчи m орқали, ўша тенгламадаги эркли ўзгарувчилар эса j орқали белгиланган. Демак, агар $m = j$ бўлса, ўзгарувчи m нинг ўз лаги олдидаги коэффициент назарда тутилмоқда. σ_m ва σ_j – VAR даги ўзгарувчилардан фойдаланиб энг кичик квадратлар усули (OLS) ёрдамида баҳоланган авторегрессиядаги хатоликларнинг дисперциялари. Юқоридаги формуладаги σ_m ва σ_j ларнинг нисбати

m ва j ўзгарувчилар турли шкалаларда (бирликларда) бўлиши эҳтимолини назорат қилади. l – лагнинг тартиби ($l = 1, \cdots, p$). λ – априорнинг қатъийлигини назорат қилувчи, тадқиқотчи томонидан ўрнатиладиган параметрлардир:

– λ_1 қаралаётган эрксиз ўзгарувчининг ўз лаглари қатъийлигини бошқаради (ўртача квадратик четланиши орқали).

– λ_2 тенгламадаги бошқа ўзгарувчилар лаглари қатъийлигини бошқаради;

– λ_3 биринчидан юқори лаглар олдидаги коэффициентларнинг нолга айланиш даражасини бошқаради. У ўсган сари, юқори лаглар олдидаги коэффициентлар нолга яқинлашади;

– λ_4 ўзгармаслар олдидаги коэффициентларнинг ноаниқлик даражасини бошқаради.

Ва ниҳоят, априор тақсимот ўртачаси қуйидагича аниқланади:

$$\beta_0 = (0, \cdots, 0, \lambda_0, 0, \cdots, 0)',$$

бунда λ_0 – m-тенгламадаги эрксиз ўзгарувчининг биринчи лаги олдидаги коэффициентнинг априор ўртачасини билдиради ва векторда m-ўринда жойлашган бўлади, ва улар 1-тартибли авторегрессияга, AR(1), бўйсунади, деб фараз қилинади.

Априорларни бошқарувчи гиперпараметрлар учун қиймат ўрнатиш муҳим масала ҳисобланади. Одатда, адабиётларда параметрлар учун қуйидаги қийматлардан фойдаланилади[27]:

$$\lambda_1 = 0.2$$
$$\lambda_2 = 0.5$$
$$\lambda_3 = 1 \text{ ёки } 2$$
$$\lambda_4 = 10^5.$$

[27] Canova, Fabio, 2007, Methods for Applied Macroeconomic Research, Princeton University Press, Princeton.

1-илова. Матрицалар алгебраси асослари

1-таъриф. Сонлардан иборат тўртбурчак шаклидаги жадвалга **матрица** дейилади.

Матрицанинг ўлчами $m \times n$ кўринишида ёзилади ва бу матрица m та сатр ҳамда n та устундан иборат эканлигини билдиради. Одатда матрицалар лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан белгиланади.

$$\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Бу ерда $a_{i,j}$ сонлар матрицанинг **элементлари** деб аталади.

2-таъриф. Сатрлари сони устунлари сонига тенг бўлган, яъни $m = n$ бўлган матрица n-тартибли **квадрат матрица** деб аталади.

3-таъриф. Бош диагонали элементлари 1 га тенг бўлиб, қолган барча элементлари 0 га тенг бўлган n-тартибли квадрат матрица **бирлик матрица** дейилади ва $\mathbf{I}$ каби белгиланади.

$$\mathbf{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4-таъриф. Берилган $\mathbf{A}$ матрицанинг сатрларини устунлари, устунларини сатрлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган матрица $\mathbf{A}$ матрицага **транспонирланган матрица** дейилади ва $\mathbf{A^T}$ ёки $\mathbf{A}'$ каби белгиланади, яъни

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ бўлса, } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

5-таъриф. Агар $\mathbf{A}$ квадрат матрица ўзининг транспонирланган матрицасига тенг бўлса, бундай матрица **симметрик матрица** дейилади, яъни $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$. Симметрик матрица элементлари бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган бўлади, яъни $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Энди **матрицалар устида амаллар**ни аниқлаймиз.

6-таъриф. Ҳар бирининг ўлчами $m \times n$ бўлган $\mathbf{A}$ ва B **матрицаларнинг йиғиндиси** деб бу матрицаларнинг мос сатр ва устун элементларини қўшиш натижасида ҳосил бўлган $m \times n$ ўлчамли матрицага айтилади, яъни $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)$ ёки:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

7-таъриф. Ихтиёрий λ ҳақиқий сон (одатда скаляр дейилади) ва $\mathbf{A}$ матрицанинг **скаляр кўпайтмаси** деб қуйидаги матрицага айтилади:

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

8-таъриф. Ўлчами $m \times n$ бўлган $\mathbf{A}$ ва ўлчами $n \times z$ бўлган B **матрицаларнинг** $\mathbf{A} \cdot \mathrm{B}$ **кўпайтмаси** деб шундай $m \times z$ ўлчамли матрицага айтиладики, бунда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1z} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nz} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \Big(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\Big) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$$

бўлади. Бу ерда $i = 1, 2, \ldots, m$ ва $j = 1, 2, \ldots, z$. Ёки

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1z} + \cdots + a_{1n}b_{nz} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1z} + \cdots + a_{2n}b_{nz} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1z} + \cdots + a_{mn}b_{nz} \end{pmatrix}.$$

Буни схематик кўринишда қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ i\text{-сатр} \rightarrow & \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ \\ \end{pmatrix} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & j\text{-устун} & & (i,j)\text{-элемент} \end{array}$$

Матрицалар устида амалларнинг **асосий хоссалари**:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
3. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{D} = \mathbf{BD} + \mathbf{CD}$.
5. $c(\mathbf{AB}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B}, \quad (\mathbf{AB})c = \mathbf{A}(\mathbf{B}c); \quad c = const$.
6. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.
7. $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$.
8. $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$.
9. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$.
10. $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

9-таъриф. Агар n-тартибли квадрат матрица $\mathbf{A}$ учун шундай $\mathbf{B}$ матрица топилсаки, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ тенглик бажарилса, $\mathbf{B}$ матрица $\mathbf{A}$ **матрицанинг тескариси** дейилади, $\mathbf{A}$ матрица эса тескариланувчи ёки хосмас матрица деб аталади. Тескариланувчи $\mathbf{A}$ матрицанинг тескариси $\mathbf{A}^{-1}$ каби белгиланади.

Тескари матрица қуйидаги хоссаларга эга:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
3. $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathbf{T}}$.
4. $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad c = const, \quad c \neq 0$.

10-таъриф. Ўлчами $m \times n$ бўлган $\mathbf{A}$ ва ўлчами $p \times q$ бўлган $\mathbf{B}$ матрицаларнинг $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ **Кронекер кўпайтмаси** деб шундай $mp \times nq$ ўлчамли матрицага айтиладики, бунда

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

бўлади. Бу янада тўлиқроқ ёзилса:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\
a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq}
\end{pmatrix}.$$

Масалан,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix}\\ \\3\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix} & 4\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 0 & 1\times 5 & 2\times 0 & 2\times 5\\1\times 6 & 1\times 7 & 2\times 6 & 2\times 7\\3\times 0 & 3\times 5 & 4\times 0 & 4\times 5\\3\times 6 & 3\times 7 & 4\times 6 & 4\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 0 & 10\\6 & 7 & 12 & 14\\0 & 15 & 0 & 20\\18 & 21 & 24 & 28\end{pmatrix}.$$

11-таъриф. Ўлчами $m\times n$ бўлган $\mathbf{A}$ матрицани ўлчами $mn\times 1$ бўлган устун векторга айлантирувчи чизиқли алмаштиришга **векторлаштириш** дейилади ва $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ каби белгиланади. Бошқача айтганда, матрицани векторлаштириш учун унинг ҳар бир устунини битта устунга кетма-кет жойлаштириш зарур:

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{m2} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Масалан, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ матрица учун $\mathrm{vec}(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}a\\c\\b\\d\end{pmatrix}$ бўлади.

12-таъриф. Ҳар бирининг ўлчами $n\times 1$ бўлган векторлар тўплами $\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{r}\}$ берилган бўлсин. Агар $c_1\mathrm{x}_1+c_2\mathrm{x}_2+\dots+c_r\mathrm{x}_\mathrm{r}=0$ тенгликдан $c_1=c_2=\dots=c_r=0$ эканлиги келиб чиқса, $\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{r}\}$ векторлар **чизиқли эркли векторлар** дейилади.

13-таъриф. Агар $c_1\mathrm{x}_1+c_2\mathrm{x}_2+\dots+c_r\mathrm{x}_\mathrm{r}=0$ тенглик бир вақтнинг ўзида нолга тенг бўлмаган сонлар учун ўринли бўлса, у ҳолда $\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{r}\}$ векторлар **чизиқли боғлиқ векторлар** дейилади. Бошқача айтганда, берилган векторлар тўпламидаги камида битта векторни мазкур тўпламдаги бошқа векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида ифодалаш мумкин.

Масалан, $\mathrm{x}_1=(1,1,1)$, $\mathrm{x}_2=(-1,2,1)$, $\mathrm{x}_3=(1,4,3)$ векторлар чизиқли боғлиқ. Чунки $2\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3=(0,0,0)$.

14-таъриф. Ўлчами $m \times n$ бўлган $\mathbf{A}$ матрицанинг чизиқли эркли устунлари максимум сонига $\mathbf{A}$ **матрица ранги** дейилади ва $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ каби белгиланади.

Ўлчами $m \times n$ бўлган ихтиёрий $\mathbf{A}$ матрица учун $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$ муносабат ўринли.

15-таъриф. n та ўзгарувчидан **квадратик форма** деб ҳар бир қўшилувчиси мазкур ўзгарувчиларнинг квадратлари ёки иккита турли ўзгарувчининг кўпайтмаларидан иборат бўлган йиғиндига айтилади.

Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар берилган бўлиб, x_i^2 олдидаги коэффициентни a_{ii} билан, $x_i x_j$ ва $x_j x_i$ $(i \neq j)$ кўпайтмалар олдидагиларни эса мос равишда a_{ij} ва a_{ji} билан белгиласак, берилган ўзгарувчилардан тузилган $\mathbf{Q}$ квадратик формани қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots \\
&\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.
\end{aligned}
$$

Бу ерда $x_ix_j = x_jx_i$ ва $a_{ij} = a_{ji}$ бўлади.

Масалан, иккита x_1, x_2 ўзгарувчилардан тузилган квадратик форма қуйидагича бўлади:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\
&= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\
&= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.
\end{aligned}
$$

Энди юқоридаги квадратик формани матрица кўринишида ифодалаш масаласини қарайлик. Қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.
$$

У ҳолда:

$$\mathbf{Q} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x^T A x}.$$

Умуман олганда, охирги тенгликни ихтиёрий n та ўзгарувчидан тузилган квадратик форма учун ҳам ёзиш мумкин. Яъни:

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x^T A x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Бу ерда $\mathbf{x}$ ўзгарувчилардан тузилган ўлчами $n \times 1$ бўлган вектор, $\mathbf{A}$ эса ўлчами $n \times n$ бўлган симметрик матрицадир ва у **квадратик форма матрицаси** деб аталади.

Масалан. Қуйидаги квадратик форманинг матрицасини ёзиш талаб этилган бўлсин:

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Бу ерда $a_{11} = 2, a_{22} = -5, a_{33} = 8, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -1, a_{23} = a_{32} = 3$. Демак,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

16-таъриф. $\mathbf{A}$ симметрик матрица:

а) агар ихтиёрий 0 дан фарқли ҳақиқий сонлардан тузилган ҳар қандай $n \times 1$ ўлчамли $\mathbf{x}$ вектор учун $\mathbf{x^T A x} > 0$ бўлса, **мусбат аниқланган** (positive definite) дейилади;

б) агар ихтиёрий ҳақиқий сонлардан тузилган ҳар қандай $n \times 1$ ўлчамли $\mathbf{x}$ вектор учун $\mathbf{x^T A x} \geq 0$ бўлса, **мусбат ярим аниқланган** (positive semi-definite) дейилади.

Масалан. Бирлик матрица $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ мусбат аниқланган (ва айни пайтда, мусбат ярим аниқланган). Чунки ҳақиқий a ва b элементли $\mathbf{x}$ устун вектор учун:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{I}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Симметрик ҳақиқий $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ матрица мусбат аниқланган. Чунки нолдан фарқли ҳақиқий a, b ва c элементли $\mathbf{x}$ устун вектор учун:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathbf{T}} M \mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{T}} M\right) \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} [2a - b] & [-a + 2b - c] & [-b + 2c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= (2a - b)a + (-a + 2b - c)b + (-b + 2c)c \\ &= 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2 \\ &= a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 \\ &= a^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + c^2 > 0. \end{aligned}$$

Мусбат аниқланган ва мусбат ярим аниқланган матрицалар **хоссалари**:

1. Мусбат аниқланган матрицанинг диагонал элементлари ҳам қатъий мусбат бўлади. Мусбат ярим аниқланган матрицанинг диагонал элементлари эса номанфий бўлади.

2. Агар матрица мусбат аниқланган бўлса, у тескариланувчи ва тескари матрица ҳам мусбат аниқланган бўлади.

3. Ихтиёрий $\mathbf{X}$ матрица учун $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ ва $\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}$ кўпайтмалар мусбат ярим аниқланган бўлади.

4. Агар ўлчами $m \times n$ бўлган $\mathbf{X}$ матрица учун $\operatorname{rang}(\mathbf{X}) = n \leq m$ бўлса, у ҳолда $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ кўпайтма мусбат аниқланган ва демак, хосмас матрица бўлади.

2-илова. Эҳтимоллар назарияси асослари

Эҳтимоллар назариясининг дастлабки тушунчалари – тажриба, ҳодиса, элементар ҳодиса, эҳтимоллик каби тушунчалар бўлиб, уларни баён қилишни бошлаймиз.

1-таъриф. **Тажриба** ҳодисани рўёбга келтирувчи тайин шартлар тўпламининг бажарилишидан иборатдир. Фараз қилайлик, биз тангани 10 марта ташладик ва унинг гербли томони тушишини санадик. Бу тажрибага мисол бўлади.

2-таъриф. Тажриба натижасига **ҳодиса** дейилади. Юқоридаги каби тажрибада танганинг “герб” ёки “рақам” томони тушиши ҳодиса ҳисобланади.

Ҳодисаларни уч турга ажратиш мумкин: муқаррар, рўй бермайдиган ва тасодифий ҳодисалар.

Муқаррар ҳодиса деб тажриба натижасида албатта рўй берадиган ҳодисага айтилади.

Мумкин бўлмаган ҳодиса деб тажриба натижасида мутлақо рўй бермайдиган ҳодисага айтилади.

Тасодифий ҳодиса деб тажриба натижасида рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Масалан, ўйин кубиги бир марта ташланди. Бу ҳолда:

– “тушган очко 6 дан катта эмас” ҳодисаси муқаррар ҳодиса;

– “тушган очко 10 га тенг” ҳодисаси мумкин бўлмаган ҳодиса;

– “тушган очко жуфт сон” ҳодисаси тасодифий ҳодисадир.

3-таъриф. **Элементар ҳодиса** деб тажрибанинг ҳар қандай натижасига айтилади. Масалан, тажриба тангани икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади: “герб-герб”, “герб-рақам”, “рақам-герб”, “рақам-рақам”.

4-таъриф. **Эҳтимол** – тасодифий ҳодисанинг рўй бериш имкониятини миқдорий жиҳатдан характерловчи сондир. A элементар ҳодисанинг эҳтимоли $P(A)$ каби белгиланади ва бу ерда $0 \leq P(A) \leq 1$ муносабат ўринли бўлади.

5-таъриф. Тажриба натижасининг бирор қийматлар тўпламидан тасодифий равишда битта қийматни қабул қилувчи ўзгарувчи миқдорга **тасодифий миқдор** (random variable) дейилади. Масалан, танганинг 10 марта ташланганида гербли томонининг тушиши сони тасодифий миқдордир ва унинг қийматлар тўплами 0 дан 10 гача бўлган бутун сонлардан иборат.

Тасодифий миқдорлар, одатда, $X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$ каби лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан, уларнинг қабул қилган қийматлари эса мос кичик $x, y, z, \ldots$ ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, юқоридаги мисолда танганинг 10 марта ташланганида гербли томонининг тушиши сонини X билан белгилайлик. Бунда X ҳеч қандай аниқ бир қийматга боғлиқ эмас, лекин биз X нинг $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ тўпламидан қиймат қабул қилишини биламиз. Юқоридаги тажриба натижаси эса, масалан $x = 6$ бўлиши мумкин.

6-таъриф. Агар тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматлар тўплами саноқли (чекли ёки чексиз) бўлса, бундай тасодифий миқдорга **дискрет тасодифий миқдор** дейилади. “Саноқли чексиз” дейилганда тасодифий миқдор чексиз миқдор қабул қила олса ҳам, бу қийматлар ва натурал сонлар ўртасида бирга-бир кўринишида мослик ўрнатиш мумкинлиги тушунилади.

Мисоллар:

1. Ўйин кубиги бир марта ташланганида тушадиган очко дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг қийматлар тўплами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ дан иборат.

2. Берилган партиядаги яроқсиз маҳсулотлар сони $\{4, 5, 2, 3, \ldots\}$ нолдан то партиядаги маҳсулотларнинг умумий сонига тенг бўлгунга

қадар бутун қийматлар қабул қилувчи дискрет тасодифий миқдор.

3. Нишонга биринчи марта теккизгунча ўқ отишлар сони $\{1, 5, 3, \ldots\}$ барча натурал сонлар тўпламидан қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор.

7-таъриф. Бирор чекли ёки чексиз сонли оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдор **узлуксиз тасодифий миқдор** дейилади.

Мисоллар:

1. Артиллерия снарядининг учиш масофаси (2.5–3 км) маълум бир мусбат сонлар оралиғида қийматлар қабул қилувчи узлуксиз тасодифий миқдор.

2. Бир ой давомида қорамол массасининг кўпайиши (-0.5 кг, 5.3 кг, …) маълум бир сонлар оралиғида қийматлар қабул қилувчи узлуксиз тасодифий миқдор.

8-таъриф. Тасодифий миқдорнинг **тақсимот қонуни** деб унинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари ва мос эҳтимолликлари мажмуига айтилади.

9-таъриф. Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни **эҳтимоллик масса функцияси (probability mass function)** дейилади. Бундай аталишининг сабаби тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган ҳар бир қиймати маълум массага (яъни эҳтимолга) эга деб қаралади. Бунда жами масса 1 га тенг бўлади.

Эҳтимоллик масса функцияси қуйидаги формула ёрдамида ёзилиши мумкин:

$$f(x_j) = p_j, \quad j = 1, 2, \cdots, k,$$

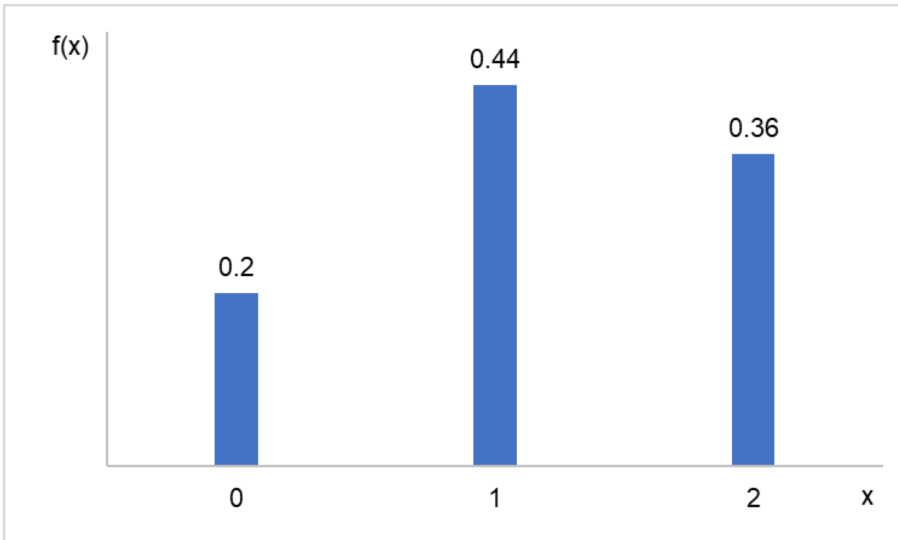
бу ерда $f(x)$ — X тасодифий миқдор бирор ҳақиқий қийматни қабул қилгандаги эҳтимолликни билдиради.

Масалан, баскетболчи томонидан 2 та уринишда саватга тушурилган тўплар сони X бўлсин. Бунда X тасодифий миқдор $\{0, 1, 2\}$

қийматларни қабул қилиши мумкин. X нинг эҳтимоллик масса функцияси қуйидагича берилган деб фараз қилайлик:

$$f(0) = 0.20, \quad f(1) = 0.44, \quad f(2) = 0.36.$$

Буни график кўринишида қуйидагича тасвирлаш мумкин:

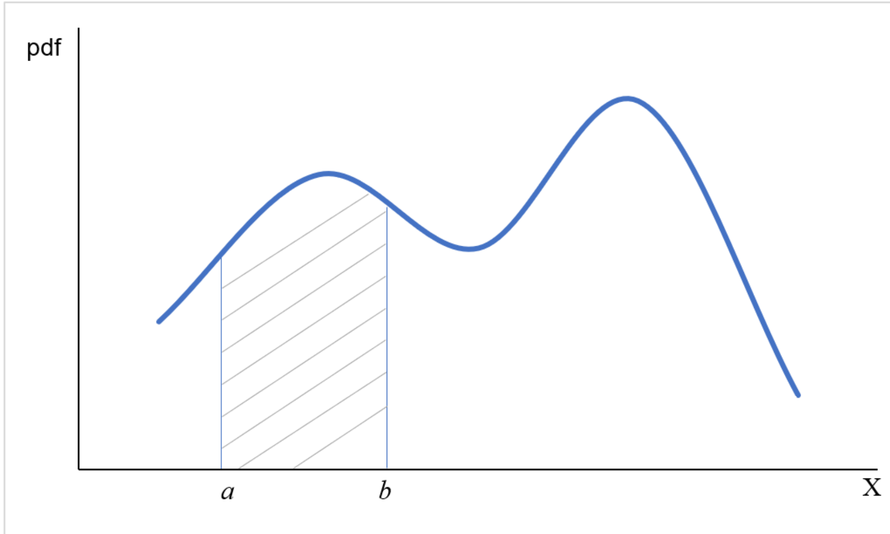


10-таъриф. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни **эҳтимоллик зичлик функцияси (probability density function)** дейилади ва қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математик анализ курсидан маълумки, аниқ интеграл функция графиги ва ўқи орасида ҳосил бўлган юзани ҳисоблайди. Демак, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг a ва b нуқталар орасидаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоллиги ҳам эҳтимоллик зичлик функцияси остидаги юзанинг a ва b интервалдаги қийматига тенгдир. Эҳтимоллик зичлик функцияси остидаги бутун юза эса 1 га тенг бўлиши лозим, яъни:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$



Шу ўринда зичлик сўзига чуқурроқ тўхталсак. Физика фанидан маълумки:

$$\text{зичлик} = \frac{\text{масса}}{\text{ҳажм}}$$

яъни 1 бирлик ҳажмга (м^3) қанча масса (кг) тўғри келади. Масалан, сувнинг зичлиги 997 кг/м^3 га тенг.

Шунингдек, ҳудуд учун аҳоли зичлигини топайлик:

$$\text{аҳоли зичлиги} = \frac{\text{аҳоли сони}}{\text{ҳудуд майдони}}$$

Масалан, Ўзбекистонда ўртача аҳоли зичлиги 74.1 киши/км^2.

Шу каби, эҳтимоллар назариясида эҳтимолликни масса сифатида қарасак (дискрет ҳолатда бўлгани каби), зичлик интервалдаги масса қанчалик оғирлигини кўрсатади. Бунга бошқа томондан ёндашайлик:

Қаралаётган интервал боши x даги кичик мусбат ўзгаришни δ деб олайлик ва ушбу интервалда эҳтимолликни ҳисоблайлик:

$$P(x \leq X \leq x + \delta) = \int_{x}^{x+\delta} f\,(x)\,dx \approx \; f\,(x) \cdot \delta.$$

Демак, δ нинг етарлича кичик қийматларида эҳтимоллик (функция графиги остидаги юза) тақрибан δ (тўғри тўртбўрчакнинг эни) ва зичлик функцияси қиймати (тўғри тўртбўрчакнинг бўйи) кўпайтмасига тенг бўлади. Охирги тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\boxed{f\left(x\right) \approx \frac{P\left(x \le X \le x+\delta\right)}{\delta}.}$$

Бундан келиб чиқадики, зичлик 1 бирлик кесма узунлигига мос келадиган эҳтимолликни (массани) билдиради. Зичлик эҳтимоллик бўлмагани учун 1 дан кичик бўлиши шарт эмас.

11-таъриф. X тасодифий миқдорнинг **математик кутилмаси** деб унинг барча мумкин бўлган қийматларининг тортилган ўртачасига айтилади ва $E(X)$ ёки μ каби белгиланади. Бунда вазн қилиб тасодифий миқдор қийматларига мос эҳтимолликлар олинади.

$$E\left(X\right) = x_1 f\left(x_1\right) + x_2 f\left(x_2\right) + \ldots + x_k f\left(x_k\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j f\left(x_j\right).$$

12-таъриф. X тасодифий **миқдорнинг дисперцияси (variance)** деб унинг математик кутилмасидан четланиши квадратининг математик кутилмасига айтилади ва $Var(X)$ ёки σ_X^2 ёки σ^2 каби белгиланади:

$$Var\left(X\right) = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i-\mu\right)^2 p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Хусусан, вазн сифатида мос эҳтимолликлар олинганда $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ бўлади.

Дисперция тасодифий миқдор ўзининг математик кутилмасидан қанчалик узоқда жойлашганини кўрсатади.

13-таъриф. X тасодифий миқдорнинг **ўртача квадратик четланиши (standard deviation)** деб унинг дисперциясидан олинган мусбат квадрат илдизга айтилади ва $sd(X)$ ёки σ_X ёки σ каби белгиланади:

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)}.$$

14-таъриф. X ва Y тасодифий миқдорларнинг **ковариацияси** деб мазкур тасодифий миқдорлар мос ўртачаларидан четланишлари кўпайтмаларининг математик кутилмасига айтилади ва $Cov(X,Y)$ ёки σ_{XY} каби белгиланади:

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Ковариация иккита тасодиф миқдор ўртасидаги чизиқли боғлиқликни ўлчайди. Мусбат ковариация иккита тасодифий миқдор бир хил йўналишда, манфий ковариация эса уларнинг қарама-қарши йўналишда ўзгаришини англатади. 0 ковариация эса тасодифий миқдорлар боғлиқсиз (independent) эканлигини билдиради.

Ковариациянинг абсолют қиймати (магнитудаси) қаралаётган тасодифий миқдорларнинг шкаласига (бирликларига) боғлиқ бўлгани унинг талқинини қийинлаштиради. Масалан, биз таълим даражаси ва йиллик даромад ўртасидаги боғлиқликни ўрганмоқчимиз. Биз X сифатида таълимни ва Y сифатида даромад миқдорини олишимиз мумкин. Ковариация коэффициентининг абсолют қиймати таълимни йиллар ёки ойларда, даромадни эса сўм ёки бошқа валютада ўлчашимизга қараб фарқ қилади. Равшанки, ушбу тасодифий миқдорларни қандай бирликларда ўлчашимиз улар ўртасидаги боғлиқлик даражасининг қанчалигида умуман аҳамиятга эга эмас.

Шунинг учун тасодифий миқдорлар ўртасидаги чизиқли боғлиқлик даражаси (корреляция коэффициенти) тасодифий миқдорларнинг ковариациясини уларнинг мос ўртача квадратик четланишларига бўлиш (яъни ҳар хил бирлик муаммосини бартараф этиш) орқали топилади.

15-таъриф. X ва Y тасодифий миқдорларнинг **корреляция коэффициенти** деб қуйидаги нисбатга айтилади ва $Corr(X,Y)$ ёки ρ_{XY}

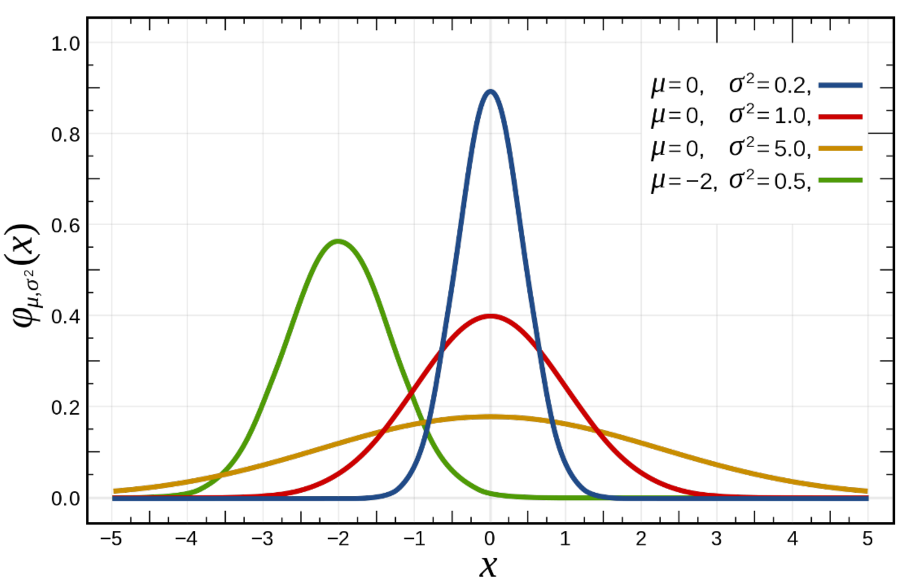
каби белгиланади:

$$Corr(X,\ Y) = \frac{Cov(X,Y)}{sd(X)\cdot sd(Y)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \in [-1;1].$$

16-таъриф. Қуйидаги кўринишдаги эҳтимоллик зичлик функциясига эга бўлган узлуксиз тасодифий миқдор **нормал тасодифий миқдор** дейилади:

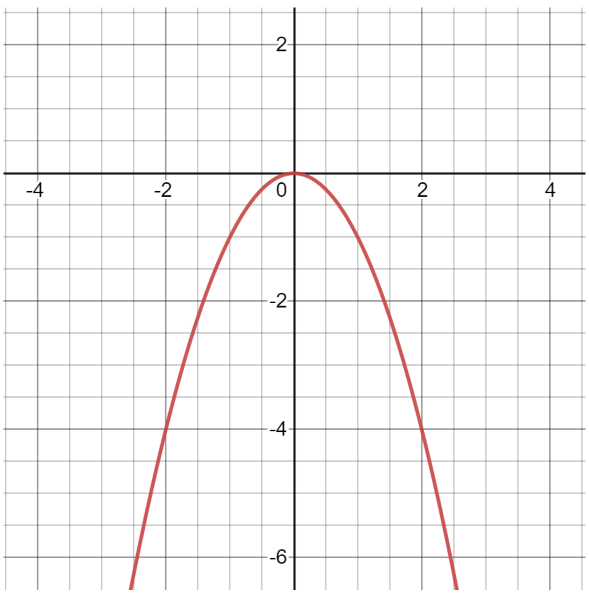
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Бу ерда μ тасодиф миқдорнинг математик кутилмаси, σ^2 эса унинг дисперциясидир ва улар нормал тақсимот қонунининг **параметрлари** дейилади. Одатда, ўртачаси μ ва дисперцияси σ^2 бўлган X тасодифий миқдор нормал тақсимот қонуни бўйича берилган бўлса $X \sim Normal(\mu,\sigma^2)$ ёки қисқароқ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ каби ёзилади. Нормал тақсимот қонуни баъзан таниқли математик олим К.Ф. Гаусс шарафига **Гаусс тақсимот қонуни** деб ҳам аталади. Унинг графиги қуйида келтирилган:

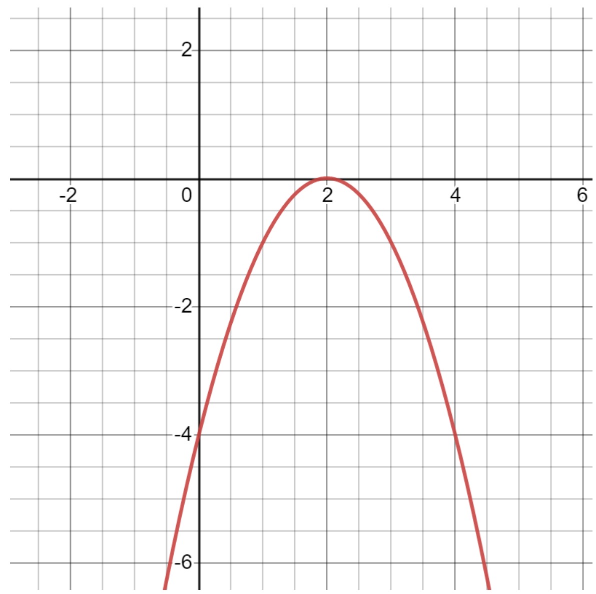


Бир қарашда нормал тақсимот қонунининг берилиши мураккаб кўринса-да, уни босқичма-босқич соддароқ тушунтириш мумкин.

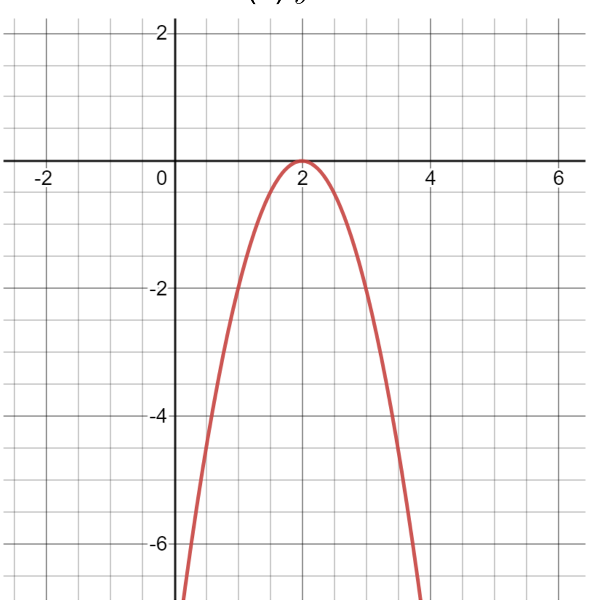
Маълумки, $y = x^2$ функция графиги параболадан иборат. $y = -x^2$ бўлганда паробола шохлари пастга қарайди. $y = -(x-\mu)^2$ бўлганда парабола маркази μ бирлик ўнгга силжийди. $y = \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ бўлганда σ^2 парабола шохлари кенглигини (тарқоқлигини) ўзгартиради. $y = \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ эса қўнғироқ шаклидаги (bell-shaped) графикни ва эҳтимолликнинг доимо мусбат бўлишини таъминлайди.



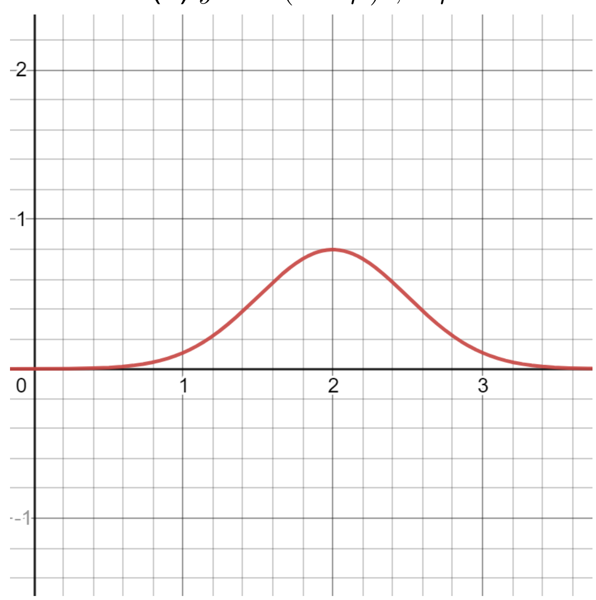
(a) $y = -x^2$



(b) $y = -(x-\mu)^2, \quad \mu = 2$



(c) $y = \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}, \quad \sigma^2 = 0.25$



(d) $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

Қуйидаги Гаусс интеграли деб аталувчи хосмас интегралнинг қиймати $\sqrt{\pi}$ га тенглигини инобатга олсак:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},} \tag{22}$$

шунингдек, аниқ интегралнинг қиймати эҳтимолликни англатишини ва унинг 1 га тенг бўлиши лозимлигини ҳисобга олсак (интеграл остидаги ифодани *нормаллаштирувчи кўпайтувчи* деб аталадиган $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ га кўпайтириш орқали кўпайтмани 1 га айлантирамиз):

$$\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}\cdot\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = 1$$

бўлади ва биз юқоридаги таърифдаги каби $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ кўринишидаги эҳтимоллик зичлик функциясини ҳосил қиламиз.

Нормал тақсимот қонуни статистика ва эконометрикада муҳим аҳамиятга эга. Тасодифий миқдорларни нормал тақсимот қонуни бўйича берилган деб фараз қилиш эҳтимоллик ҳисоб-китобларини осонлаштиради. Шунингдек, ҳаётда маълум бир тасодифий миқдорлар тақрибан нормал тақсимот қонунига бўйсуниши кузатилади. Масалан, одамлар бўйи ва вазни, тест натижалари, баъзи физик жараёнлар ва ҳ.к.

Энди **кўп ўзгарувчили нормал тақсимот қонунини (КНТ)** ўрганишни бошлаймиз. Бунда биз **матрицалар алгебраси** (1-илова) тушунчаларидан кенг миқёсда фойдаланамиз.

Ковариация матрицаси тушунчаси КНТни тушунишда жуда муҳим аҳамиятга эга. У барча ўзгарувчилар жуфтликлари ўртасидаги ковариация тўғрисида ихчам йўл орқали хулоса қилишимизга имконият яратади.

17-таъриф. (i,j)-элементи $Cov(X_i, X_j)$ дан иборат бўлган $n\times n$ ўлчамли матрица $X = [X_1 \cdots X_n]^T$ тасодифий векторнинг **ковариация матрицаси** дейилади ва одатда $V(X)$ ёки Σ каби белгиланади:

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} Cov[X_1, X_1] & Cov[X_1, X_2] & \cdots & Cov[X_1, X_n] \\ Cov[X_2, X_1] & Cov[X_2, X_2] & \cdots & Cov[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_n, X_1] & Cov[X_n, X_2] & \cdots & Cov[X_n, X_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}
$$

бу ерда ковариация матрицасининг диагонали бўйлаб ҳар бир тасодифий миқдорнинг дисперцияси жойлашган. $Cov[X_i, X_j] = Cov[X_j, X_i]$ бўлгани учун ковариация матрицасининг симметрик матрица эканлиги маълум бўлади.

1-хосса. Ўртачаси μ бўлган ихтиёрий X тасодифий векторнинг ковариация матрицасини қуйидагича ҳисоблаш мумкин:

$$
\boxed{\Sigma = E[(X-\mu)(X-\mu)^T] = E[XX^T] - \mu\mu^T.}
$$

Исбот.

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{pmatrix} Cov[X_1, X_1] & \cdots & Cov[X_1, X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_n, X_1] & \cdots & Cov[X_n, X_n] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E[(X_1-\mu_1)^2] & \cdots & E[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)] & \cdots & E[(X_n-\mu_n)^2] \end{pmatrix} \\
&= E\begin{pmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1) & \cdots & (X_n-\mu_n)^2 \end{pmatrix} \\
&= E\left(\begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_n-\mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \cdots X_n-\mu_n \end{pmatrix}\right) \\
&= E[(X-\mu)(X-\mu)^T].
\end{aligned}
$$

Охирги тенгликни келтириб чиқариш учун ихтиёрий n-тартибли вектор учун қуйидаги муносабат ўринли эканлигидан фойдаланилди:

$$zz^T = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_1 & z_1z_2 & \cdots & z_1z_n \\ z_2z_1 & z_2z_2 & \cdots & z_2z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_nz_1 & z_nz_2 & \cdots & z_nz_n \end{pmatrix}.$$

2-хосса. Ихтиёрий X тасодифий векторнинг ковариация матрицаси мусбат ярим аниқланган матрица бўлади.

Исбот. Юқоридаги хосса исботидаги каби $z = X - \mu$ эканлигини ва мусбат ярим аниқланган матрицалар хоссаларига кўра, ихтиёрий z матрица учун zz^T кўпайтма доимо мусбат ярим аниқланган бўлади.

18-таъриф. n та тасодифий миқдордан ташкил топган $X = [X_1 \cdots X_n]^T$ тасодифий векторнинг эҳтимоллик зичлик функцияси μ ўртача ва Σ ковариация матрицаси билан қуйидаги кўринишда бўлса, ушбу X тасодифий вектор **кўп ўзгарувчили нормал тақсимот қонуни** бўйича берилган дейилади ва $X \sim N(\mu, \Sigma)$ каби ёзилади:

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right),$$

бу ерда μ – ҳақиқий сонлардан ташкил топган n-тартибли вектор ва Σ эса $n \times n$ ўлчамли мусбат аниқланган симметрик матрицадир, $|\Sigma|$ унинг детерминанти бўлади.

17-таърифдаги 2-хоссага кўра, ихтиёрий X тасодифий векторнинг ковариация матрицаси мусбат ярим аниқланган матрица бўлади. Лекин юқоридаги таърифидаги каби Σ^{-1} мавжуд бўлиши учун Σ тескариланувчи ва демак, матрицанинг ранги унинг тартибига тенг бўлиши керак (яъни тўла рангли – [full rank] матрица). Ҳар қандай тўла рангли симметрик матрица мусбат аниқланган бўлиши зурурий шарт бўлгани учун Σ ҳам симметрик мусбат аниқланган ва демак тескариланувчидир.

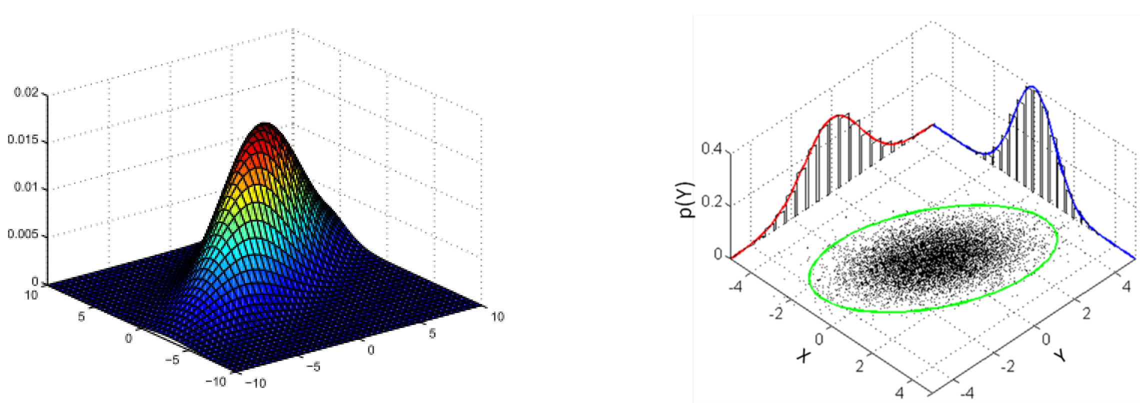
Бир ўзгарувчили нормал тақсимот қонуни зичлик функциясида e сонининг даража кўрсаткичидаги $-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$ ифода x ўзгарувчидан квадратик функция бўлиб, паробола шохлари пастга қараган бўлса, КНТ зичлик функциясидаги $-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)$ ифода эса вектор ўзгарувчи x дан квадратик формадир. Σ мусбат аниқлангани учун, унинг тескариси Σ^{-1} ҳам мусбат аниқланган, яъни ихтиёрий нолдан фарқли z вектор учун $z^T\Sigma^{-1}z > 0$ муносабат ўринли. Бундан ихтиёрий $x \neq \mu$ вектор учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) > 0$$
$$-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) < 0.$$

Бир ўзгарувчили ҳолатда бўлгани каби охирги ифоданинг графигини пастга йўналган кўнғироқсимон квадратик сирт сифатида тасаввур қилиш мумкин.

Шунингдек, бир ўзгарувчили ҳолатда нормаллаштирувчи кўпайтувчи $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ аниқ интеграл қийматининг 1 га тенг бўлишини таъминлагани каби, КНТ зичлик функцияси олдидаги $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}$ коэффициент ҳам n каррали интегралнинг қиймати 1 га тенг бўлишини таъминлайди:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)dx_1dx_2\cdots dx_n = 1.$$



Иккита тасодифий ўзгарувчили КНТ зичлик функцияси графиги

КНТ нималигини яхшироқ тушуниш учун соддароқ ҳолатдаги, яъни тасодифий ўзгарувчилар сони иккига тенг бўлган ($n=2$) ва ковариация матрицаси Σ диагонал матрица бўлган ҳолатни қарайлик.

Қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\qquad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\0 & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$$

У ҳолда КНТ зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned}
f(x;\mu,\Sigma)&=\frac{1}{2\pi\begin{vmatrix}\sigma_1^2 & 0\\0 & \sigma_2^2\end{vmatrix}^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi\left(\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & 0\\0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}\left(x_1-\mu_1\right)\\\frac{1}{\sigma_2^2}\left(x_2-\mu_2\right)\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(x_1-\mu_1\right)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(x_2-\mu_2\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(x_1-\mu_1\right)^2\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(x_2-\mu_2\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Охирги тенгликдан кўринадики, икки ўзгарувчили нормал тақсимот зичлик функцияси **иккита мустақил бир ўзгарувчили нормал тақсимот зичлик функциялари кўпайтмаси**га тенг.

Шу каби, n та ўзгарувчили КНТ зичлик функцияси ҳам n та мустақил бир ўзгарувчили нормал тақсимот зичлик функциялари кўпайтмасига тенглигини кўрсатиш мумкин.

Равшанки, юқоридаги келтириб чиқарилишлар Σ диагонал матрица бўлсин, деган фаразга таянади. Бироқ, Σ диагоналмас бўлганда ҳам зичлик функциялари графигида катта ўзгариш бўлмайди[28].

19-таъриф. Агар иккита A ва B ҳодисалардан ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчисининг рўй бериш ёки бермаслигига боғлиқ бўлмаса ушбу ҳодисалар **ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар** дейилади. Акс ҳолда бу ҳодисалар **ўзаро боғлиқ** дейилади.

Ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар ҳар бирининг рўй бериш эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

20-таъриф. A ва B ўзаро боғлиқ ҳодисалар бўлсин. B ҳодиса рўй берганлиги аниқ бўлганида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига **шартли эҳтимоллик** дейилади ва $P(A|B)$ каби белгиланади:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{бунда} \quad P(B) \neq 0.$$

Шу каби $P(B|A)$ ни ҳам ҳисоблайлик:

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}.$$

$P(BA) = P(AB)$ эканлигини ҳисобга олсак, охирги тенгликдан:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Демак:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.}$$

Охирги ҳосил бўлган формула **Байес формуласи** деб аталади.

[28] *Батафсил маълумот учун қаранг:* Chuong B. Do. The Multivariate Gaussian Distribution. Stanford University, 2008.

3-илова. Лимит теоремалари

Мазкур иловада эҳтимоллар назариясининг муҳим теоремаларидан бири **марказий лимит теоремаси** баён этилади. Бунинг учун дастлаб қуйидаги муҳим тенгсизликлар ва катта сонлар қонунини қараймиз.

Марков тенгсизлиги. X – номанфий тасодифий миқдор ($X \geq 0$) ва $a > 0$ сон берилган бўлсин. У ҳолда, X нинг энг камида a га тенг бўлиш эҳтимоли кўпи билан X нинг математик кутилмасининг a га нисбатига тенг:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Ушбу тенгсизлик ҳар доим тўғри эканлигини қуйидагича кўрсатиш мумкин. Математик кутилма таърифига кўра:

$$E[X] = \sum_{x} xf(x) \geq \sum_{x \geq a} xf(x) \geq \sum_{x \geq a} af(x) = aP(X \geq a).$$

Демак, $E[X] \geq aP(X \geq a)$. Бундан $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Марков тенгсизлиги эҳтимолликни математик кутилма билан боғлайди. Ушбу тенгсизликка кўра, агар тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси кичик бўлса, у ҳолда X нинг катта қийматларни қабул қилиш эҳтимоли ҳам кичик бўлади.

Чебишев тенгсизлиги. Марков тенгсизлигида X ўрнига $(X-\mu)^2$, a ўрнига a^2 қўйиб, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қилайлик:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] \geq P((X-\mu)^2 \geq a^2) \cdot a^2 = P(|X-\mu| \geq a) \cdot a^2.$$

Дисперция таърифига кўра $E\left[(X-\mu)^2\right] = Var(X)$:

$$Var(X) \geq P(|X-\mu| \geq a) \cdot a^2. \tag{23}$$

Охирги тенгсизилик тасодифий миқдорнинг дисперциясини унинг ўртачасидан узоқ бўлиши эҳтимоллигига боғлайди. Агар дисперция кичик бўлса, унда ўртачадан узоқ бўлиш эҳтимоллиги ҳам кичик бўлади.

Батафсилроқ тушунтириш учун (23) тенгсизликни қуйидагича ёзиб олайлик:

$$\sigma_X^2 \geq P(|X-\mu| \geq a) \cdot a^2 \implies \boxed{P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}.} \quad (24)$$

Юқоридаги тенгсизликдан кўринадики, агар a катта сон бўлса, $\frac{\sigma_X^2}{a^2}$ кичик сон бўлади. Бу ҳолда тасодифий миқдор ўзининг ўртачасидан a дан ҳам кўпроқ катта бўлиши эҳтимоли кичик сон бўлади.

Шунингдек, агар дисперция кичик сон бўлса, тасодифий миқдор ўзининг ўртачасидан узоқ бўлиши эҳтимоли ҳам кичик бўлади. Ўртачадан узоқлашганимиз сари, яъни a катталашгани сайин, бу эҳтимоллик кичиклашади. (24) тенгсизлик **Чебишев тенгсизлиги** деб аталади.

(24) тенгсизликда $a = k\sigma$ каби белгилаш киритайлик:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Биз бу орқали k та ўртача квадратик четланиш (standard deviation) миқдорида ўртачадан узоқда бўлиш ҳодисаси эҳтимоллигини кўряпмиз. Масалан, охирги тенгсизлик бизга ўтказилган имтихонда қатнашган гуруҳнинг қанча қисми тест натижалари ўртачадан 3 та ўртача квадратик четланиш узоқда бўлишини кўрсатади. Бу кўпи билан гуруҳнинг 1/9 қисми бўлиши мумкин.

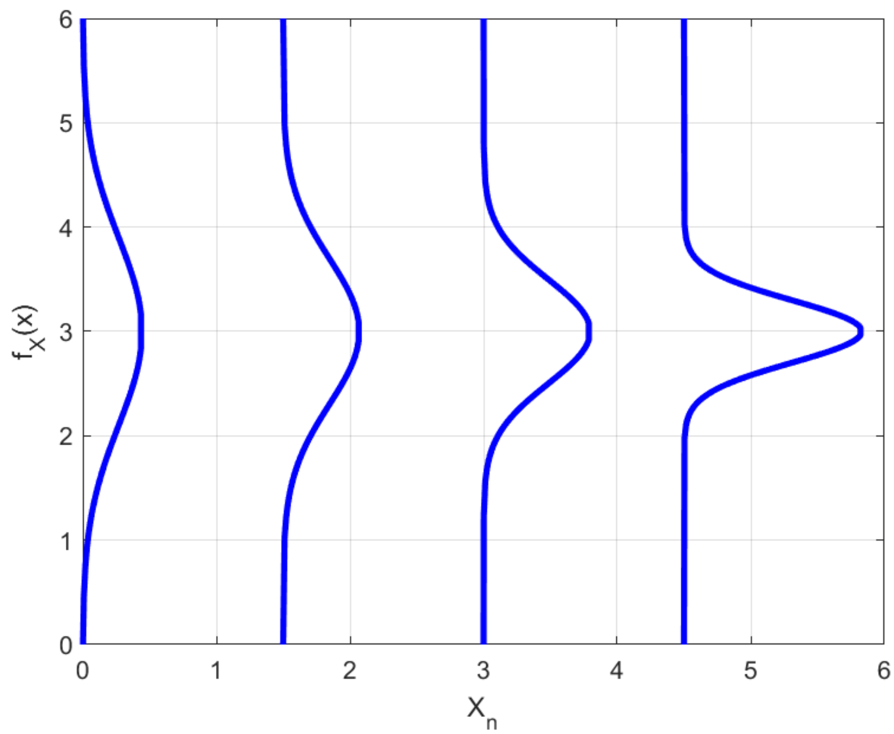
Эҳтимолликда яқинлашиш таърифи. Агар ихтиёрий ε мусбат сон учун:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0$$

бўлса, X_n тасодифий миқдор кетма-кетлиги a сонига **эҳтимолликда яқинлашади** дейилади.

Яъни X_n тасодифий миқдор кетма-кетлигининг (деярли барча) эҳтимоллик масса ёки зичлик функциялари бирор вақтдан кейин a сони атрофида концентрациялашади (тўпланади).

Бошқача айтганда, X_n тасодифий миқдор кетма-кетлигининг X_i ҳади зичлик функцияси $[a - \varepsilon_i;\ a + \varepsilon_i]$ кесма ичида тўпланади. Лекин интервал ташқарисида ҳам эҳтимоллик (зичлик функцияси остидаги юза) мавжуд. Бу эҳтимолликлар n ортиб боргани сари кичиклашиб, 0 га интилади. Буни нормал тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги мисолида қуйидаги шартли графикда кўришимиз мумкин.



Графикдан кўринадики, X_i нинг мос зичлик функциялари – $f_X(x)$ n катталашиб борган сайин, $a = 3$ нуқта атрофида концентрациялашади ва бунда, масалан, $\varepsilon = 1$ бўлганда X_i нинг $[2;\ 4]$ кесмадан ташқаридаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоллиги ҳам 0 га яқинлашади.

Катта сонлар қонуни. Бизга жуфт-жуфт эркли, бир хил μ ўртачага ва σ^2 дисперцияга эга бўлган n та $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар берилган бўлсин. Мазкур тасодифий миқдорларнинг ўртачаси:

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

бунда M_n танланма ўртачаси (sample mean) ҳисобланади ва унинг ўзи ҳам тасодифий миқдор бўлади. Мазкур тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперцияси:

$$E[M_n] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]}{n} = \frac{\mu n}{n} = \mu,$$

$$Var(M_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{чунки} \quad Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Чебишев тенгсизлигига кўра:

$$P(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Охирги тенгликда лимитга ўтсак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун:

$$\boxed{P(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$$

Бундан кўринадики, эҳтимолликда яқинлашиш таърифига биноан, M_n тасодифий миқдор (танланма тўплам ўртачаси) μ сонига (бош тўплам ўртачаси – ҳақиқий ўртача) яқинлашади ва бу **катта сонлар қонуни** (заиф) дейилади. Бошқача айтганда, танланма тўплам ўлчами катталашганда унинг ўртачаси бош тўплам ўртачасининг яхши баҳоси бўлади.

Жуфт-жуфт эркли ва бир хил σ^2 дисперцияга эга бўлган n та $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар йиғиндисини S_n билан белгилайлик:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad Var(S_n) = n\sigma^2.$$

Мазкур йиғиндига бошқа тасодифий миқдорлар қўшилганда ҳам унинг дисперцияси ўзгармаслиги учун уни $\sqrt{n}$ га бўламиз. У ҳолда:

$$Var\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{Var(S_n)}{(\sqrt{n})^2} = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

S_n ни қуйидаги усул орқали “стандартлаштирамиз”:

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma_{S_n}} = \frac{S_n - nE[X]}{\sqrt{n}\sigma}$$

бунда янги ҳосил бўлган тасодифий миқдор Z_n нинг ўртачаси 0 га ва дисперцияси 1 га тенг бўлади:

$$E[Z_n] = 0, \quad Var(Z_n) = 1.$$

Марказий лимит теоремаси. Ихтиёрий c сони ва стандарт нормал тасодифий миқдор Z_n учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\boxed{P(Z_n \le c) \to P(Z \le c)}$$

бунда $Z \sim N(0,1)$, $P(Z \le c)$ – стандарт нормал кумулятив тақсимот функцияси (cumulative distribution function) – $\Phi(c)$:

$$\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ушбу теореманинг маъноси шуки, **кўплаб сондаги эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимоти** жуда умумий шартлар бажарилганда **нормал тақсимотга яқин бўлади**. Бошқача айтганда, қачонки бизда “шовқинли” бирон-бир ҳодиса мавжуд бўлса ва биз кузатадиган “шовқин” бир-биридан мустақил бўлган кўплаб тасодифий ҳодисалар жамланмасидан иборат бўлса, биз кузатадиган умумий эффект (таъсир) нормал тасодифий тақсимот билан тавсифланиши мумкиндир. Масалан, нархлар ҳаракати бозорда иштирок этадиган кўплаб турли хил иқтисодий агентларнинг кичик қарорлари ва бошқа кичик воқеалар билан боғлиқ бўлиши мумкин, деб қарашимиз мумкин. Демак, *товарлар нархларининг тақсимоти нормал тасодифий миқдорлар орқали яхши тавсифланиши мумкин*.

4-илова. Баъзи муҳим эҳтимоллик тақсимотлари

1-таъриф. Ихтиёрий $\alpha > 0$ учун қуйидаги интеграл формула ёрдамида берилган функцияга **Гамма функцияси** дейилади ва $\Gamma(\alpha)$ каби белгиланади:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{25}$$

Гамма функциясининг қуйидагича муҳим хоссасини қарайлик. Маълумки, $\alpha = 1$ бўлганда:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = -0 + 1 = 1.$$

$\alpha > 1$ бўлганда бўлаклаб интеграллаш орқали:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} d\left(-e^{-x}\right) \\ &= x^{\alpha-1}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right)(\alpha-1)x^{\alpha-2} dx \\ &= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1} e^{-x} dx = \boxed{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).}\end{aligned}$$

Юқоридагилардан фойдаланиб, Гамма функциясининг натурал сонлардаги қийматлари учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot 1,\ \Gamma(3) = 2 \cdot 1,\ \Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1,\ \Gamma(5) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ва индукцияга кўра

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

Демак, Гамма функцияси **факториал функциянинг мусбат ҳақиқий сонлар учун кенгайтмаси** бўлади. Хусусан, $n = 1/2$ бўлганда

$x = u^2$ каби алмаштириш киритиб ва (22) ифодадаги Гаусс интеграли қийматидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Бундан фойдаланиб, рекуррент формула ёрдамида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$0.5! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862.$$

Энди (25) тенгликнинг иккала томонини ҳам $\Gamma(\alpha)$ га бўлайлик ва $x = \beta y$ каби белгилаш киритайлик (бунда $\beta > 0$):

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta y}dy.$$

У ҳолда

$$\boxed{f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}} \qquad (26)$$

функция эҳтимоллик зичлик функцияси бўлади, чунки у номанфий ва интергали 1 га тенг.

2-таъриф. (26) тенгликдаги каби $f(x|\alpha,\beta)$ эҳтимоллик зичлик функциясига эга тақсимотга α ва β параметрлар билан берилган **Гамма тақсимоти** дейилади ва $\Gamma(\alpha,\beta)$ каби белгиланади.

1-хосса. Агар $X_1, X_2, \ldots, X_n$ эркли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги қуйидагича гамма тақсимотлари бўйича берилган бўлса

$$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1,\beta),\ X_2 \sim \Gamma(\alpha_2,\beta),\ \ldots,\ X_n \sim \Gamma(\alpha_n,\beta)$$

у ҳолда уларнинг $X_1+X_2+\ldots+X_n$ йиғиндиси $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\ \beta)$ каби тақсимотга эга бўлади[29].

[29] *Исбот учун қаранг:* https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture6.pdf

2-хосса. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ тасодифий миқдор ва нолдан фарқли c ҳақиқий сон учун қуйидиги муносабат ўринли[30]:

$$cX \sim \Gamma\left(\alpha, \frac{\beta}{c}\right).$$

3-таъриф. Жуфт-жуфт эркли, бир хил ўртача ва дисперцияга эга бўлган n та $X_1, X_2, \ldots, X_n$ стандарт нормал тасодифий миқдорлар берилган бўлса,

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

йиғинди n эрклилик даражаси билан берилган χ_n^2 **тақсимот** (*хи-квадрат тақсимот*) деб аталади.

Теорема. Жуфт-жуфт эркли, бир хил ўртача ва σ^2 дисперцияга эга бўлган n та $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорларнинг $n\sigma^2$ дисперцияси $(n-1)$ эрклилик даражаси билан берилган χ_{n-1}^2тақсимотга бўйсунади[31], яъни

$$n\sigma^2 = n \cdot (E[X^2] - E[X]^2) \sim \chi_{n-1}^2.$$

3-хосса. χ_n^2 тақсимот $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ параметрли гамма тақсимоти бўлади. Бунинг тўғрилигини қуйида кўрсатамиз.

Стандарт нормал тасодифий миқдор $X \sim N(0,1)$ берилган бўлса, X^2 тасодифий миқдорнинг тақсимотини топайлик. X^2 нинг кумулятив тақсимот функцияси қуйидагича:

$$\mathbf{P}\left(X^2 \le x\right) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси унинг кумулятив тақсимот функциясидан олинган ҳосилага тенг бўлишидан фойдаланиб,

[30] *Исбот учун қаранг:* https://sites.stat.washington.edu/thompson/S341_10/Notes/week4.pdf, 10.4-(ii)

[31] *Исбот учун қаранг:* https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture5.pdf

X^2 нинг зичлик функциясини топамиз:

$$\begin{aligned} f_{X^2}(x) &= \frac{d}{dx}\mathbf{P}\left(X^2 \le x\right) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} (\sqrt{x})' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{x})^2}{2}} (-\sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.} \end{aligned}$$

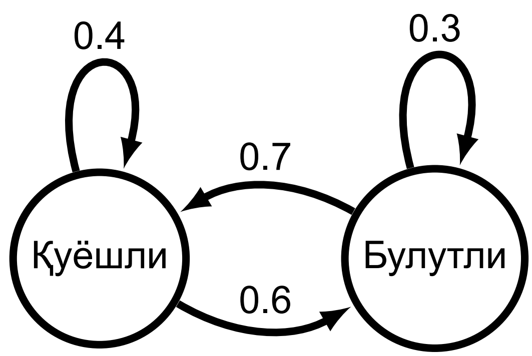
Охирги ифода $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ параметрли гамма тақсимотининг зичлик функцияси эканлигини кўриш мумкин, яъни $X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Юқорида келтирилган 1-хоссага кўра эса

$$\boxed{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

5-илова. Марков занжири

Марков занжири маълум бир эҳтимоллик қоидаларига асосан бир ҳолатдан бошқасига ўтувчи математик системадир.

Марков занжирини қуйидаги содда мисол орқали тушунтирамиз. Ҳар қандай кунда қуйидаги икки ҳолатдан биттаси бўлиши мумкин: қуёшли кун ёки булутли кун. Бугунги об-ҳаво фақат кечаги об-ҳавога боғлиқ, деб фараз қилайлик. Шунингдек, бир ҳолатдан бошқасига ўтиш қуйидаги тўртта эҳтимолликлар орқали тўлалигича бошқарилсин:



Масалан, бугун қуёшли кун бўлса, эртага булутли кун бўлиши эҳтимоли юқоридаги диаграммага асосан 0.6 га тенг. Шу каби, булутли кундан кейин қуёшли кун келиши ёки яна булутли кун бўлиши эҳтимоли ҳам диаграммага кўра мос равишда 0.7 ва 0.3 га тенг. Ушбу Марков занжирида бўлиши мумкин бўлган жами ҳолатлардан ташкил топган {“Қуёшли”, “Булутли”} тўплами **ҳолатлар фазоси**, бугунги куннинг “Қуёшли” ёки “Булутли” эканлиги **жорий ҳолат** дейилади.

t вақтдаги ҳолатни X_t каби белгиласак, Марков занжири қуйидагича жараён бўлади:

$$\boxed{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_t, \ldots}$$

Амалиётда Марков занжири кўплаб ҳолатлардан ташкил топиши мумкин. Шунингдек, Марков занжирининг энг асосий хусусияти шуки, унда **ихтиёрий ҳолат фақат ва фақат олдинги ҳолатга боғлиқ** деб қаралади ва бу **Марков хоссаси** дейилади, яъни

$$\boxed{P(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1, X_0) = P(X_{t+1}|X_t).}$$

Ҳолатдан-ҳолатга ўтиш эҳтимолликларидан ташкил топган матрица **ўтиш матрицаси** дейилади:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Қуёшли} & \text{Булутли} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Қуёшли} \\ \text{Булутли} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Масалан, бугун булутли кун бўлса, эртага қуёшли кун бўлиш эҳтимолини билиш учун биз матрицанинг “Булутли” сатри ва “Қуёшли” устуни кесишмасидаги сонни қараймиз.

Фараз қилайлик, бугун (0 кунда) об-ҳаво “Қуёшли”. Эртанги кунда “Қуёшли” ёки “Булутли” об-ҳаво бўлиши эҳтимолини мос равишда жорий ҳолат ва ундан кейинги кунга ўтиш эҳтимолликларининг тортилган ўртачаси сифатида ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} P(\text{Қуёшли}_1|\text{Қуёшли}_0) &= P(\text{Қуёшли}_0) \cdot P(\text{Қуёшли}|\text{Қуёшли}) + \\ &+ P(\text{Булутли}_0) \cdot P(\text{Қуёшли}|\text{Булутли}) \\ &= 1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.7 = 0.4 \end{aligned}$$

ҳамда

$$\begin{aligned} P(\text{Булутли}_1|\text{Булутли}_0) &= P(\text{Қуёшли}_0) \cdot P(\text{Булутли}|\text{Қуёшли}) + \\ &+ P(\text{Булутли}_0) \cdot P(\text{Булутли}|\text{Булутли}) \\ &= 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.3 = 0.6. \end{aligned}$$

Юқоридагилардан фойдаланиб, ҳар кунги об-ҳаво эҳтимоллигини жадвал кўринишида ёзишимиз мумкин:

	X_0	X_1	X_2	…	
P(Қуёшли)	1	0.4	0.58	…	τ_1
P(Булутли)	0	0.6	0.42	…	τ_2

Шу каби 2-кунги об-ҳаво эҳтимолликларини ҳисобласак:

$$P(\text{Қуёшли}_2|\text{Қуёшли}_1) = 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.58,$$
$$P(\text{Булутли}_2|\text{Булутли}_1) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.42.$$

Агар кейинги кунлар учун ҳам об-ҳаво эҳтимолликларини ҳисоблашни давом эттирсак, мазкур эҳтимолликлар бирор сонга, яъни доимий ҳолат – τ_1 ва τ_2 (steady state)га яқинлашадими, деган табиий савол туғилади. Агар шундай бўлса, маълум вақтдан сўнг жорий ҳолатдан кейинги ҳолатга ўтиш эҳтимолликлари ўзгармас равишда τ_1 ва τ_2 ларга тенг бўлади, яъни

$$\begin{cases} \tau_1 \cdot P(\text{Қуёшли}|\text{Қуёшли}) + \tau_2 \cdot P(\text{Қуёшли}|\text{Булутли}) = \tau_1 \\ \tau_1 \cdot P(\text{Булутли}|\text{Қуёшли}) + \tau_2 \cdot P(\text{Булутли}|\text{Булутли}) = \tau_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 0.4\tau_1 + 0.7\tau_2 = \tau_1 \\ 0.6\tau_1 + 0.3\tau_2 = \tau_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0.6\tau_1 = 0.7\tau_2 \\ 0.6\tau_1 = 0.7\tau_2 \end{cases}$$

Демак, қаралаётган тенгламалар системаси чизиқли боғлиқ. Шунинг учун, ундан битта тенгламани оламиз ва эҳтимоллик ҳоссасига кўра τ_1 ва τ_2 ларнинг йиғиндиси 1 га тенг бўлиши кераклигидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 0.6\tau_1 = 0.7\tau_2 \\ \tau_1 + \tau_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tau_1 = \frac{7}{13} \\ \tau_2 = \frac{6}{13} \end{cases}$$

Демак, Марков занжири ҳар қандай ҳолатлар тақсимотидан (бизнинг мисолда $X_0 = \{P(\text{Қуёшли}) = 1, \quad P(\text{Булутли}) = 0\}$) бошланишидан қатъи назар, маълум вақтдан кейин доимий ҳолатлар тақсимоти (stationary distribution) — $X = \{\tau_1, \tau_2\}$ га етиб боради ва унда бутун қолган давр учун қолади. Шуни таъкидлаш лозимки, барча Марков занжирлари ҳам доимий ҳолатлар тақсимотига эга бўлмаслиги мумкин.

6-илова. Монте Карло симуляция усули

Монте Карло усули сон кўринишидаги натижаларни олиш учун такрорий тасодифий танланмага асосланувчи ҳисоб-китоб алгоритмларининг кенг синфи ҳисобланади. Усулнинг асосий ғояси бошқа усуллар орқали ҳал қилиниши қийин ёки имконсиз бўлган масалаларни ечишда тасодифийликдан фойдаланишдан иборат. Мазкур ғоя татбиқини қуйидаги содда мисол ёрдамида ёритамиз.

Масала. *Томонининг узунлиги 2 га тенг бўлган квадрат шаклидаги нишонга отилган ўқнинг ўқ нишонга аниқ тегганида квадратга ички чизилган доирага тегиш эҳтимоли қандай?*

A – ўқнинг доирага тегиш ҳодисаси бўлсин. Эҳтимоллик геометрик таърифига кўра, сўралаётган эҳтимоллик доира юзининг квадрат юзига нисбати каби аниқланади (доира радиуси квадрат томони узунлиги ярмига тенг $R = a/2 = 1$):

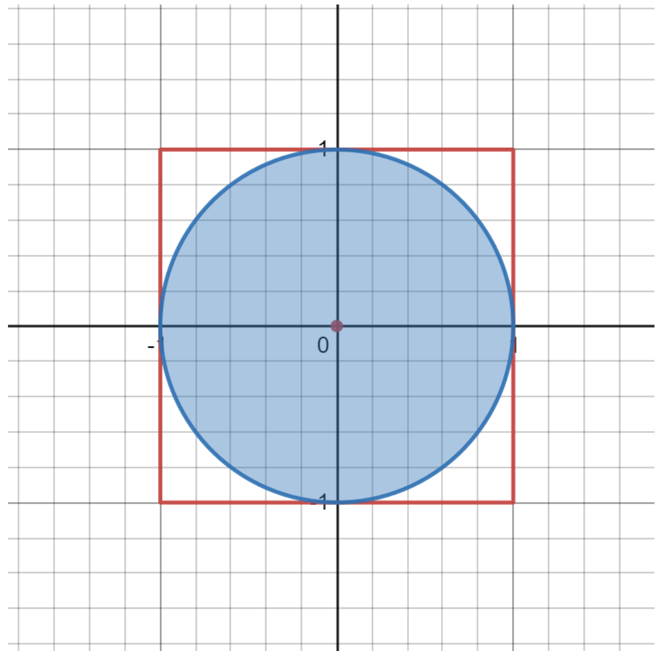
$$P(A) = \frac{\text{доира юзи}}{\text{квадрат юзи}} = \frac{\pi R^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Мазкур усул берилган масалани ечишнинг аналитик йўли ҳисобланиб, уни ечиш учун юқоридаги каби шаклларнинг юзларини ҳисоблашни билишни талаб этилади. Фараз қилайлик, биз бундан бехабармиз ва масалани фақат кўп сонли такрорий тажрибалар ўтказиш орқали ечмоқчимиз. Бу Монте Карло усулининг айнан ўзидир. Бунинг учун квадрат ичида компьютер дастури ёрдамида тасодифий нуқта ҳосил қиламиз. Агар ҳосил бўлган нуқта доира ичида бўлса, уни қабул қиламиз, акс ҳолда уни рад этамиз. Мазкур тажрибани кўп марта такрорлаймиз ва катта сонлар қонунига[32] кўра ҳақиқий эҳтимолликка жуда яқин бўлган натижа оламиз.

Алгоритмнинг батафсил кўриниши (Python дастурлаш тили мисолида) қуйида бўлиб, бунда нуқтанинг доира ичидалигини текшириш учун доира тенгсизлигидан — $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$ фойдаланамиз

[32] *Қаранг:* 3-илова.

ҳамда доира маркази координаталар системаси маркази $(x_0, y_0) = (0, 0)$ нуқтада бўлсин, деб оламиз:




```
# текис тақсимланган тасодифий миқдор ҳосил қилиш учун
# керакли функцияни юклаймиз
from random import uniform

# тажрибалар сони
N = 10000000

# Доира ичига тушган нуқталарни санаш учун ҳисоблагич
circ = 0

# тажрибани N марта такрорлаш
for i in range(1, N+1):
    # квадрат ичида тасодифий нуқта ҳосил қиламиз
    x = uniform(-1,1)
    y = uniform(-1,1)
```

```
# агар нуқта доира ичида бўлса,
        # ҳисоблагични 1 га оширамиз
 if x**2 + y**2 <= 1: # Доира тенгсизлиги
        circ += 1
```

Тажрибалар натижаси шуни кўрсатадики, квадрат ичида ҳосил бўладиган нуқталарнинг деярли 78,5 фоизи доирада ҳосил бўлади ва бу аналитик йўл билан ҳисобланган эҳтимоллик билан деярли бир хил, яъни:

$$\boxed{P_1 = \frac{circ}{N} = 0.7853951, \quad P_2 = \frac{\pi}{4} = 0.7853981, \quad \frac{P_1}{P_2} = 0.999996.}$$

Фойдаланилган манбалар

1. Blake A. and Mumtaz H., *Applied Bayesian Econometrics for Central Bankers*, Center for Central Banking Studies, Bank of England.
2. Ciccarelli M. and Rebucci A., 2003, *Bayesian VARs: A Survey of the Recent Literature with an Application to the European Monetary System*, International Monetary Fund.
3. Carriero A., 2018, *Bayesian VARs*.
4. Kadiyala K.R. and Karlsson S., 1997, *Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR-models*, Journal of Applied Econometrics, Vol. 12, pp. 99-132.
5. Greene H. W., 2002, *Econometric Analysis, Fifth Edition*, New York University.
6. Wooldridge J.M., 2016, *Introductory Econometrics, Sixth Edition*, Michigan State University.
7. Bertsekas D.P. and Tsitsiklis J.N., 2008, *Introduction to Probability, Second Edition*, Massachusetts Institute of Technology.
8. Rasulov A.S., Raimova G.M. va Sarimsakova X.K., 2006, *Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika*, O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.
9. Mamurov E. va Adirov T., 2005, *Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika*, Toshkent moliya instituti.
10. Konstantopoulos T, *One Hundred Solved Exercises for the Subject: Stochastic Processes I*, www.docplayer.net.
11. Fewster R., 2013, *Markov Chains*, The State University of Auckland, New Zealand.

Пул-кредит сиёсати департаменти томонидан тайёрланди
Таклиф ва мулоҳазалар қуйидаги манзилга жўнатилиши мумкин:
E-mail: achilov@cbu.uz
Тел.: (+998) 71 212-60-22